§ 57: EXTREMA VON FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLER

57.1. Motivation

Bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen kennen wir notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extrema (vgl. § 25):

a) Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Besitzt f in $\xi \in (a,b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(\xi) = 0$.

b) Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, $\xi \in (a,b)$ und $f'(\xi) = 0$.
Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum), gilt $f''(\xi) \geq 0$ (bzw. $f''(\xi) \leq 0$).
Ist umgekehrt $f''(\xi) > 0$ (bzw. $f''(\xi) < 0$) so ist ξ ein striktes lokales Minimum (striktes lokales Maximum).

Können wir ähnliche Aussagen auch im Fall skalarwertiger Funktionen mehrerer Variabler machen?

57.2. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $\xi \in D$ heißt <u>lokales Minimum</u> (bzw. <u>lokales Maximum</u>), falls eine Umgebung $U \subset D$ ex. mit $f(\xi) \leq f(y)$ (bzw. $f(\xi) \geq f(y)$) für alle $y \in U$.
Tritt Gleichheit nur für $y = \xi$ auf, heißt ξ <u>striktes lokales Minimum</u> (bzw. <u>striktes lokales Maximum</u>).

Damit lautet das Analogon zu 57.1.(a):

57.3. Satz (<u>Notwendige Bedingung für lokale Extrema</u>)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Hat f in $\xi \in D$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt $\nabla f(\xi) = 0$.

<u>Beweis:</u>

Für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist

$$\varphi(t) := f(\xi + tv)$$

in einer Umgebung von $t = 0$ erklärt und dort stetig differenzierbar. Ferner habe φ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Mit 57.1.(a) und der Kettenregel 54.5 gilt:

$$0 = \varphi'(0) = \nabla^T f(\xi) \cdot v$$

Da dies für beliebige $v \neq 0$ gilt, ist $\nabla^T f(\xi) = 0$. □

57.4. <u>Bemerkungen</u>

a) Ein Punkt $\xi \in D$ mit $\nabla f(\xi) = 0$ heißt auch <u>stationärer Punkt</u> von f.

b) Bei der Suche nach stationären Punkten muss man häufig ein nichtlineares System von n Gleichungen mit n Unbekannten lösen.

Beispiel: $f(x,y) = e^{xy} + x^2 \sin y$

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla f = \begin{pmatrix} y e^{xy} + 2x \sin y \\ x e^{xy} + x^2 \cos y \end{pmatrix}$$

2 nichtlineare Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Ähnlich wie bei Funktionen einer Variablen kann man hierbei Fixpunktansätze oder Newton-artige Verfahren einsetzen.

c) Nicht jeder stationäre Punkt ist ein Extremum!

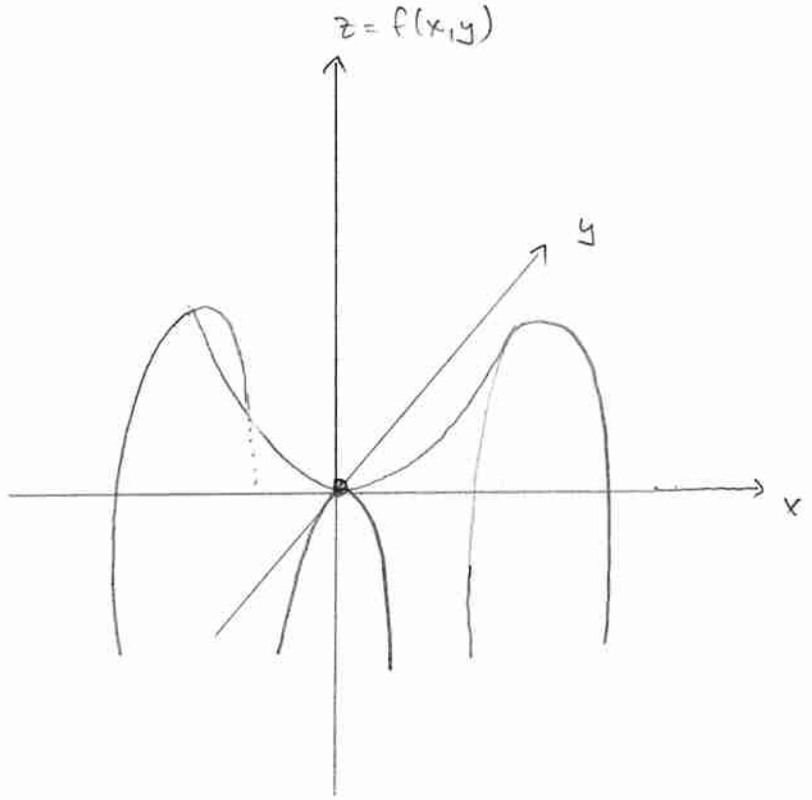
Beispiel:

Die stationären Punkte von $f(x,y) = x^2 - y^2$ erfüllen

$$0 = \nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist einziger stationärer Punkt.

Allerdings existieren in jeder Umgebung um diesen stationären Punkt Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$. Solche stationären Punkte nennt man Sattelpunkte.



Zur Klassifikation stationärer Punkte betrachten wir das Analogon zu 57.1 (b):

57.5. Satz (Klassifikation stationärer Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $\xi \in D$ mit $\nabla f(\xi) = 0$. Dann gilt:

a) Notwendige Bedingung:

Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum) von f, so ist die Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit)

b) Hinreichende Bedingung:

i) Ist $Hf(\xi)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum) von f.

ii) Ist $Hf(\xi)$ indefinit, so ist ξ ein Sattelpunkt, d.h. in jeder Umgebung $U \subset D$ ex. $y, z \in U$ mit $f(y) < f(\xi) < f(z)$.

Beweis:

a) Sei ξ o.B.d.A. ein lokales Minimum. Für $v \neq 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach dem Satz von Taylor (55.6):

$$\underbrace{0 \leq}_{\text{da lok. Minimum}} f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) = \underbrace{\nabla^T f(\xi)}_{0 \text{ nach Vor.}} + \frac{1}{2} \varepsilon v^T Hf(\xi + \theta \varepsilon v) \varepsilon v$$

mit $\theta \in (0,1)$. Also ist $v^T Hf(\xi + \theta \varepsilon v) v \geq 0$.

Für $\varepsilon \to 0$ folgt: $v^T Hf(\xi) v \geq 0$. Da v beliebig war, ist $Hf(\xi)$ positiv semidefinit.

b) i) Sei $Hf(\xi)$ positiv definit. Da f eine C^2-Funktion ist, ist $Hf(x)$ dann auch in einer hinreichend kleinen Kreisumgebung $K_\varepsilon(\xi)$ mit Radius ε und Mittelpunkt ξ pos. definit. Für $x \in K_\varepsilon(\xi) \setminus \xi$ gilt also nach Taylor:

$$f(x) - f(\xi) = \underbrace{\nabla^T f(\xi)}_{0} (x-\xi) +$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{(x-\xi)^T Hf(\xi + \theta(x-\xi))(x-\xi)}_{>0} \quad \text{mit } \theta \in (0,1)$$

$$> 0$$

Da $x \in K_\varepsilon(\xi) \setminus \xi$ beliebig war, folgt aus $f(x) - f(\xi) > 0$, dass ξ ein striktes lokales Minimum ist.

ii) Sei nun $Hf(\xi)$ indefinit. Dann ex. Eigenwerte λ_1, λ_2 von $Hf(\xi)$ mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Für die entsprechenden Eigenvektoren v, w gilt also

$$v^T Hf(\xi) v > 0$$
$$w^T Hf(\xi) w < 0.$$

Wie in (a) zeigt man, dass es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ gibt mit

$$f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) = \frac{1}{2} \varepsilon v^T Hf(\xi + \theta_1 \varepsilon v) \varepsilon v > 0$$

$$f(\xi + \varepsilon w) - f(\xi) = \frac{1}{2} \varepsilon w^T Hf(\xi + \theta_2 \varepsilon w) \varepsilon w < 0$$

für alle $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$.

Somit ist ξ Sattelpunkt von f. $\square$

57.6. <u>Bemerkung</u>

Nach Satz 57.5 gelten folgende Implikationen:

$$\begin{array}{|ccc|} \xi \text{ lok. Minimum} & \Longleftarrow & \xi \text{ striktes lok. Minimum} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ Hf(\xi) \text{ pos. semidef.} & \Longleftarrow & Hf(\xi) \text{ pos. definit} \end{array}$$

Keine Implikation ist umkehrbar!

57.7. <u>Beispiel</u>:

$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x-1) \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte: $\quad 0 \overset{!}{=} \nabla f(x,y) \quad \Rightarrow \quad 2y(x-1) = 0$

Fall 1: $\quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ liefert $y^2 + 5 = 0$.

Keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Fall 2: $\quad y = 0$

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ liefert $\quad x(3x+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{2}{3}$

Es gibt also 2 stat. Punkte: $\quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Klassifikation:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{indefinit} \quad \Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(-\tfrac{2}{3},0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{neg. def.} \quad \Rightarrow \quad \text{striktes Max. in } \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$