§55: DER MITTELWERTSATZ UND DER SATZ VON TAYLOR

55.1. Motivation

Ab jetzt betrachten wir wieder skalarwertige Funktionen mehrerer Variabler. Wir wollen dabei weitere Resultate von Funktionen einer Variablen übertragen.
Gibt es einen vergleichbaren Mittelwertsatz und einen entsprechenden Satz von Taylor?

55.2. Satz (Mittelwertsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D.
Ferner seien $a, b \in D$ Punkte, deren Verbindungsstrecke

$$[a,b] := \{ a + t(b-a) \mid t \in [0,1] \}$$

ganz in D liegt.
Dann gibt es eine Zahl $\Theta \in (0,1)$ mit

$$f(b) - f(a) = \nabla^T f(a + \Theta \cdot (b-a))\,(b-a)$$

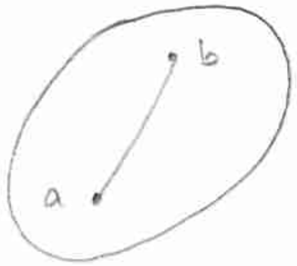
Beweis:

Wir parametrisieren die Verbindungsstrecke $[a,b]$ so, dass wir den Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen anwenden können.
Setze $h(t) := f(a + t(b-a))\,, \quad t \in [0,1]$.
$h(t)$ ist stetig auf $[0,1]$ und nach der Kettenregel 54.4 (b) auch differenzierbar auf $(0,1)$. Somit sind die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz einer Variablen erfüllt und es gilt

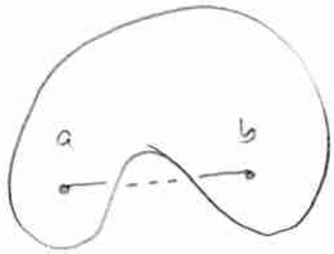
$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= h(1)-h(0) \\ &= h'(\theta)\cdot(1-0) \qquad \text{mit } 0<\theta<1 \\ &= \nabla^T f\big(a+\theta(b-a)\big)\,(b-a) \qquad \text{Kettenregel 54.5} \quad . \ \square \end{aligned}$$

55.3. <u>Bemerkung</u>

Gilt die Bedingung $[a,b] \subset D$ für <u>alle</u> Punkte $a,b \in D$, so heißt die Menge D <u>konvex</u>.



konvexe Menge



nichtkonvexe Menge

Bei konvexen Mengen gilt der Mittelwertsatz also für beliebige Punkte $a,b \in D$.

55.4. <u>Beispiel</u>

Sei $f(x,y) = \cos x + \sin y$, $\quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\quad f(0,0) = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$

Nach dem Mittelwertsatz ex. also ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} 0 = f(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) - f(0,0) &= \nabla^T f\left(\theta\cdot\begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \\ &= \left(-\sin(\theta\tfrac{\pi}{2}),\ \cos(\theta\tfrac{\pi}{2})\right)\begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\cos(\theta\tfrac{\pi}{2}) - \sin(\theta\tfrac{\pi}{2})\right) \end{aligned}$$

In der Tat ist diese Gleichung für $\theta = \frac{1}{2}$ erfüllt. $\square$

55.5. Motivation zur Taylorentwicklung

Eine differenzierbare Funktion läßt sich lokal durch eine lineare Funktion (d.h. ein Polynom 1. Grades) approximieren.

Wir wollen nun eine m-fach differenzierbare Funktion durch ein Polynom m-ten Grades annähern.

Dazu verallgemeinern wir den Satz von Taylor auf skalarwertige Funktionen mehrerer Variabler.

Zur Erinnerung des Satz von Taylor für skalarwertige Funktionen einer Variablen (vgl. 24.2):

Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\xi \in (a,b)$ und $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine C^{m+1}-Funktion. Dann gilt die folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_m(x,\xi) + R_m(x,\xi)$$

mit

$$T_m(x,\xi) := \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$ Taylorpolynom m-ten Grades

$$R_m(x,\xi) := \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \Theta(x-\xi))$$ Restglied nach Lagrange ($\Theta \in (0,1)$)

Für $m = 0$ schließt der Satz von Taylor den Mittelwertsatz ein.

55.6. Satz (Satz von Taylor)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\xi \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine C^{m+1}-Funktion. Dann gilt folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_m(x, \xi) + R_m(x, \xi)$$

mit

$$T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x-\xi)^T \nabla \right]^k f \Big|_\xi$$

Taylorpolynom m-ten Grades

$$R_m(x, \xi) = \frac{1}{(m+1)!} \left[(x-\xi)^T \nabla \right]^{m+1} f \Big|_{\xi + \Theta(x-\xi)}$$

Lagrange-Restglied ($\Theta \in (0,1)$)

55.7. Erläuterungen

$$\left[(x-\xi)^T \nabla \right]^k = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i) \partial_{x_i} \right]^k$$

Dieser Ausdruck wird formal ausmultipliziert und nach den partiellen Ableitungen sortiert.

Beispiel für $n = 2$:

$$\left[(x-\xi)^T \nabla \right]^0 f \Big|_\xi = f(\xi)$$

$$\left[(x-\xi)^T \nabla \right] f \Big|_\xi = (x_1 - \xi_1) f_{x_1}(\xi) + (x_2 - \xi_2) f_{x_2}(\xi)$$

$$\left[(x-\xi)^T \nabla \right] f \Big|_\xi = \left[(x_1 - \xi_1) \partial_{x_1} + (x_2 - \xi_2) \partial_{x_2} \right]^2 f \Big|_\xi$$

$$= (x_1 - \xi_1)^2 f_{x_1 x_1}(\xi) + 2 (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) f_{x_1 x_2}(\xi)$$

$$+ (x_2 - \xi_2)^2 f_{x_2 x_2}(\xi)$$

$$= (x-\xi)^T \, Hf(\xi) \, (x-\xi)$$

(quadr. Form zur Hesse-Matrix)

55.8. Beweis des Satzes von Taylor

Wie beim Mittelwertsatz 55.2 verwenden wir eine Umparametrisierung, mit der man den Satz von Taylor für Funktionen *einer* Variablen anwenden kann:

$$\varphi(t) := f(\underbrace{\xi + t(x-\xi)}_{\in D \text{ für } -\varepsilon_1 < t < \varepsilon_2, \text{ da } D \text{ offen und konvex}})$$

Damit gilt für ein $\theta \in (0,1)$:

$$(*) \quad f(x) = \varphi(1) \overset{24.2}{=} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta).$$

Wie sehen die $\varphi^{(k)}(t)$ konkret aus?

$$\varphi(t) = [(x-\xi)^T \nabla]^0 f \,\big|_{\xi + t(x-\xi)}$$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + t(x-\xi))(x_i - \xi_i) \qquad \text{(Kettenregel 54.5)}$$

$$= [(x-\xi)^T \nabla]^1 f \,\big|_{\xi + t(x-\xi)}$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \xi_i) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi + t(x-\xi))(x_j - \xi_j) \right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i) \partial_{x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \xi_j) \partial_{x_j} \right) f \,\big|_{\xi + t(x-\xi)}$$

$$= [(x-\xi)^T \nabla]^2 f \,\big|_{\xi + t(x-\xi)}$$

Mit vollst. Induktion folgt:

$$\varphi^{(k)}(t) = [(x-\xi)^T \nabla]^k \,\big|_{\xi + t(x-\xi)}$$

Einsetzen in $(*)$ liefert

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} [(x-\xi)^T \nabla]^k f \,\big|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} [(x-\xi)^T \nabla]^{m+1} f \,\big|_{\xi + \theta(x-\xi)}$$

$\square$.

55.9. Beispiel

Berechne das Taylorpolynom $T_2(x,\xi)$ zweiten Grades von $f(x,y,z) = xy^2 \sin z$ im Entwicklungspunkt $\xi = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

$$T_2(x,\xi) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \left[(x-\xi)^T \nabla\right]^k f \Big|_\xi$$

$$= f(\xi)$$

$$+ (x-1) f_x(\xi) + (y-2) f_y(\xi) + z f_z(\xi)$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[(x-1)^2 f_{xx}(\xi) + (y-2)^2 f_{yy}(\xi) + z^2 f_{zz}(\xi)$$

$$+ 2(x-1)(y-2) f_{xy}(\xi) + 2(x-1) z f_{xz}(\xi) + 2(y-2) z f_{yz}(\xi) \Big]$$

Ableitungen	Auswertung in $(1,2,0)^T$
$f = xy^2 \sin z$	0
$f_x = y^2 \sin z$	0
$f_y = 2xy \sin z$	0
$f_z = xy^2 \cos z$	4
$f_{xx} = 0$	0
$f_{yy} = 2x \sin z$	0
$f_{zz} = -xy^2 \sin z$	0
$f_{xy} = 2y \sin z$	0
$f_{xz} = y^2 \cos z$	4
$f_{yz} = 2xy \cos z$	4

$$\Rightarrow T_2(x,\xi) = 4z + \frac{1}{2}\left(2(x-1)z \cdot 4 + 2(y-2)z \cdot 4\right)$$

$$= z\left(4 + 4(x-1) + 4(y-2)\right)$$

$$= -8z + 4xz + 4yz$$

□

55.10. Bemerkungen

a) Für $m=0$ liefert der Satz von Taylor:

$$f(x) = f(\xi) + (x-\xi)^T \nabla f(\xi + \theta(x-\xi)), \qquad \theta \in (0,1)$$

Dies ist äquivalent zum Mittelwertsatz 55.2 für $a=\xi$, $b=x$:

$$f(x) - f(\xi) = \nabla^T f(\xi + \theta(x-\xi))(x-\xi)$$

Der Mittelwertsatz ist also ein Spezialfall des Satzes von Taylor.

b) Mit Hilfe der Hesse-Matrix

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \dots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1x_n} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

läßt sich das Taylorpolynom 2. Grades darstellen als

$$T_2(x,\xi) = f(\xi) + (x-\xi)^T \nabla f(\xi) + \frac{1}{2}(x-\xi)^T Hf(\xi)\cdot(x-\xi)$$

(vgl. Erläuterungen 55.7)

c) Für beschränkte partielle Ableitungen der Ordnung $m+1$ hat das Restglied die Fehlerordnung $O(|x-\xi|^{m+1})$. Somit folgt für die Approximationsgüte des Taylorpolynoms:

$$f(x) = T_m(x,\xi) + O(|x-\xi|^{m+1})$$

d) Mit $h := x - \xi$ lautet eine Alternativschreibweise des Satzes von Taylor:

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (h^T \nabla) f \big|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} (h^T \nabla)^{m+1} f \big|_{\xi + \theta h} .$$

mit $\theta \in (0,1)$.