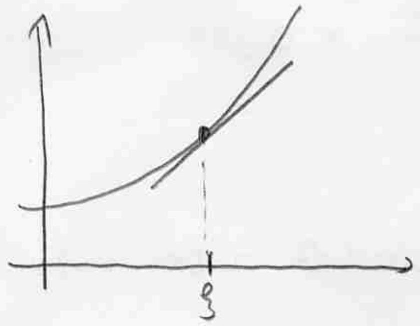
§ 54. TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

54.1. Motivation

Für eine skalarwertige Funktion f einer reellen Variablen bedeutet Differenzierbarkeit in ξ, dass der Graph der Funktion in ξ eine Tangente besitzt mit Steigung $f'(\xi)$.



$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Mit anderen Worten:

Die Funktion $f(x)$ wird in einer Umgebung von ξ gut durch eine lineare Funktion $g(x) = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ approximiert, d.h.

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - \left(f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)\right)}{x - \xi} = 0$$

Wir wollen nun dieses Konzept auf vektorwertige Funktionen mehrerer Variable verallgemeinern.

54.2. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\xi \in D$ (total, vollständig) differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung

$$g(x) = A \cdot (x-\xi) + f(\xi)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - \big(A(x-\xi) + f(\xi)\big)}{|x-\xi|} = 0.$$

Wie hängen totale und partielle Differenzierbarkeit zusammen?

54.3. Satz (Partielle und totale Differenzierbarkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

a) Totale Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit:

Ist f in ξ differenzierbar, so ist f auch stetig in ξ.

b) Totale Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit:

Ist f in ξ total differenzierbar, so ist f in ξ auch partiell differenzierbar. Die zugehörige Matrix der linearen Approximation ist identisch mit der Jacobi-Matrix $Jf(\xi)$.

c) Stetige partielle Differenzierbarkeit impliziert totale Differenzierbarkeit:

Ist f eine C^1-Funktion auf D, so ist f auf D auch total differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen nur (a) und (b).

a) Ist f in ξ differenzierbar, so folgt wegen

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - (A(x-\xi) - f(\xi))}{|x-\xi|} = 0$$

und der Stetigkeit der euklidischen Norm, dass

$$\lim_{x \to \xi} |f(x) - f(\xi) - A(x-\xi)| = 0.$$

Damit gilt:

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f(\xi) - A(x-\xi)| + |A(x-\xi)|$$

$$\to 0 + 0 = 0 \quad \text{für } x \to \xi.$$

Das beweist die Stetigkeitsaussage $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

b) Mit den kanonischen Einheitsvektoren $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ und $x = \xi + h e_j$ folgt aus der totalen Differenzierbarkeit:

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(\xi) - A(x-\xi)}{\|x-\xi\|_\infty}}_{\to 0 \text{ für } x \to \xi} = \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{|h|} - \frac{h A e_j}{|h|}$$

$$= \frac{h}{|h|} \left(\frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h} - A e_j \right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h} = A e_j \quad j\text{-te Spalte von } A.$$

d.h. f ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$. $\square$.

Gelten ähnliche Differentiationsregeln wie bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen? Man kann zeigen:

54.4. Satz (Differentiationsregeln)

a) Linearität

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g: D \to \mathbb{R}^m$ seien differenzierbar in $\xi \in D$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann $\alpha f(x) + \beta g(x)$ differenzierbar in ξ, und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha J f(\xi) + \beta J g(\xi).$$

b) Kettenregel

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$ in $\xi \in D$ differenzierbar und $g: E \to \mathbb{R}^k$ in $f(\xi)$ differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ ebenfalls in ξ differenzierbar und es gilt:

$$J(g \circ f)(\xi) = \underbrace{J g(f(\xi))}_{\text{„äußere Ableitung"}} \cdot \underbrace{J f(\xi)}_{\text{„innere Ableitung"}}$$

54.5. Bemerkung:

Ein wichtiger Spezialfall dieser Kettenregel ergibt sich für $n = k = 1$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

Wir betrachten also $(g \circ f)(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(\xi) = J g(f(\xi)) \cdot J f(\xi)$$

$$= \nabla^T g(f(\xi)) \cdot \begin{pmatrix} f_1'(\xi) \\ \vdots \\ f_m'(\xi) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(\xi)) \cdot f_k'(\xi).$$