§53: ABLEITUNGSOPERATOREN FÜR VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN

53.1. Motivation

Vektorwertige Funktionen mehrerer Variable treten in der Informatik z.B. bei der Verarbeitung von Farbbildern auf. Kontinuierliche Farbbilder lassen sich als Funktionen $f: D \to \mathbb{R}^3$ auffassen. D ist ein rechteckiger Bildbereich, und der Wertebereich beschreibt die 3 Kanäle rot, grün, blau.

Wie verallgemeinert man Konzepte wie partielle Ableitungen und Gradient auf vektorwertige Funktionen?

53.2. Def.:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\xi \in D$. Die vektorwertige Funktion $f: D \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>partiell differenzierbar</u> in ξ, falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + he_i) - f(\xi)}{h} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ existieren.}$$

(Dabei ist der Grenzwert vektorwertiger Funktionen im Sinne der euklidischen Norm zu verstehen.)

53.3. Bemerkung

Die partiellen Ableitungen lassen sich also komponentenweise berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\xi) \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Diese $m \cdot n$ partiellen Ableitungen lassen sich als Einträge einer $m \times n$-Matrix deuten. Sie ist die Verallgemeinerung des Gradienten auf den vektorwertigen Fall:

53.4. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in ξ. Dann heißt

$$Jf(\xi) := \begin{pmatrix} \nabla^T f_1(\xi) \\ \vdots \\ \nabla^T f_m(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) von f in ξ.

53.5. Bemerkungen

a) Verwechsele nicht die Hesse-Matrix (2. Ableitungen einer skalarwertigen Funktion) mit der Jacobi-Matrix (1. Ableitungen einer vektorwertigen Funktion).

b) I.A. ist die Jacobi-Matrix weder quadratisch noch symmetrisch.

c) Gelegentlich schreibt man statt Jf auch Df oder f'.

53.6. Beispiel

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \\ \cos y \\ e^{xy} \end{pmatrix}$$

lautet:

$$J f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & -\sin y \\ y e^{xy} & x e^{xy} \end{pmatrix}$$

53.7. Def.: Im Fall $m = n$ ist $f: D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf D. Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(x)$ eine C^k-Funktion, so ist $f(x)$ ein C^k-Vektorfeld.

Bem.: Beispiele für Vektorfelder sind Geschwindigkeitsfelder strömender Gase oder der Temperaturgradient innerhalb eines bestimmten Körpers.

53.8. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f: D \to \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz durch

$$\operatorname{div} f(\xi) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\xi)$$

Bem.: Formal kann man die Divergenz als Skalarprodukt aus Nabla-Operator und Vektorfeld auffassen. Man schreibt daher manchmal statt $\operatorname{div} f$ auch $\langle \nabla, f \rangle$, $\nabla^T f$ oder $\nabla \cdot f$.

Man zeigt leicht:

53.9. Satz (<u>Rechenregeln für die Divergenz</u>)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ und eine skalarwertige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gilt:

a) <u>Linearität</u>: $\quad \operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) <u>Produktregel</u>: $\quad \operatorname{div}(\varphi f) = (\nabla \varphi)^T f + \varphi \operatorname{div} f$

53.10. <u>Bemerkungen</u>

a) Obwohl der Nabla-Operator und die Divergenz ähnlich aussehen, unterscheidet sich ihre Wirkung sehr stark:
- Der Nabla-Operator erzeugt aus einer skalarwertigen Funktion eine vektorwertige Funktion.
- Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld eine skalarwertige Funktion.

b) Mit Hilfe der Divergenz kann man den Laplace-Operator umschreiben:
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine skalarwertige C^2-Funktion mehrerer Variablen, so gilt:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Somit kann man z.B. die Diffusionsgleichung $u_t = \Delta u$ auch als $u_t = \operatorname{div}(\nabla f)$ schreiben.

Neben der Divergenz gibt es noch einen weiteren wichtigen Differentialausdruck für Vektorfelder:

53.11. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f: D \to \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation in einem Punkt $\xi \in D$ durch

$$\operatorname{rot} f(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\xi) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\xi) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\xi) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\xi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\xi) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\xi) \end{pmatrix}$$

53.12. Bemerkungen:

a) Die Rotation ist nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Für zwei Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ kann man das Kreuzprodukt $v \times w$ definieren durch

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

mit den kanonischen Einheitsvektoren

$$e_1 = (1,0,0)^T$$
$$e_2 = (0,1,0)^T$$
$$e_3 = (0,0,1)^T.$$

c) Mit $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ kann man rot f dann formal schreiben

als $\nabla \times f$.

53.13. <u>Beispiel</u>

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y - z \\ z^2 + x^2 \\ y + 2x^2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -1 - 4x \\ 2x - 3x^2 \end{pmatrix}$$

Man kann ähnliche Rechenregeln wie beim Divergenzoperator zeigen:

53.14. Satz <u>(Rechenregeln für die Rotation)</u>. Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen.

Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g: D \to \mathbb{R}^3$ und eine skalarwertige Funktion $\varphi: D \to \mathbb{R}^3$ gilt:

a) Linearität: $\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) Produktregel: $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$.