TEIL E: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

Wir kennen bisher Differential- und Integralrechnung für Funktionen, die von einer Variablen abhängen. In Informatikgebieten wie Optimierung und Visual Computing spielen jedoch sehr oft Funktionen eine Rolle, die von mehreren Variablen abhängen. Wir müssen daher allgemeinere Konzepte betrachten.

§ 52: PARTIELLE ABLEITUNGEN

52.1. Motivation

Wir können eine skalarwertige Funktion einer Variablen ableiten:

$$f'(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}.$$

Dieser Ableitungsbegriff ist auch anwendbar bei vektorwertigen Funktionen einer Variablen: Für $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ definiert man $f'(\xi) = \begin{pmatrix} f_1'(\xi) \\ \vdots \\ f_n'(\xi) \end{pmatrix}$.

Wie aber differenziert man eine skalarwertige Funktion mehrerer Variabler, z.B. $f(x_1, x_2) = x_1^3 \cos x_2$?

Differenziert man nach einer Variablen und hält die anderen fest, gelangt man zu den partiellen Ableitungen.

52.2. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen (für alle $x \in D$ ex. $\varepsilon > 0$ mit $y \in D$ $\forall$ y mit $|y - x| < \varepsilon$), $f: D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$.

a) Die Funktion $f(x)$ ist in ξ nach x_i partiell differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h}$$

existiert. Dabei bezeichnet e_i den i-ten kanonischen Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Stelle}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ heißt partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt ξ.

b) Ist $f(x)$ in jedem beliebigen Punkt $\xi \in D$ partiell differenzierzierbar nach x_i, so heißt f auf D partiell differenzierbar nach x_i. Trifft dies für alle Variablen x_i, $i = 1, \ldots, n$ zu, so heißt f partiell differenzierbar (auf D).

Stetigkeitsbegriffe übertragen sich direkt von Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen, indem man Beträge durch euklid. Normen ersetzt.

Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$ stetige Funktionen auf D, so heißt f stetig partiell differenzierbar (C^1-Funktion) auf D

Bem.: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch $\partial_{x_i} f$, f_{x_i} oder $D_i f$.

52.3. Beispiel

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1^3 \sin x_2$$

$f(x_1, x_2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar.

Die Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen übertragen sich direkt auf Funktionen mehrerer Variablen:

52.4. Satz (Differentiationsregeln)

Sind $f, g: D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gilt

a) Linearität:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f(x)\, g(x)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

c) Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g^2(x)} \qquad \text{für } g(x) \neq 0.$$

52.5. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ (nach allen x_i) partiell differenzierbar. Dann nennt man den Vektor

$$\operatorname{grad} f(x) := \nabla f(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

<u>Gradient</u> von f in ξ. Den symbolischen Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

nennt man <u>Nabla-Operator</u> (nach der Form eines ägyptischen Musikinstruments)

52.6. <u>Bemerkungen</u>

a) Manche Bücher definieren grad f als Zeilenvektor und ∇f als Spaltenvektor.

b) Mit dem Nablaoperator läßt sich Satz 52.4 schreiben als

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$$

$$\nabla(f \cdot g) = g \nabla f + f \nabla g.$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g \nabla f - f \nabla g) \quad \text{für } g \neq 0.$$

c) Der Vektor $\nabla f(\xi)$ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt ξ. Seine Länge

$$|\nabla f| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}$$

ist ein Maß für diese Steigung.

52.7. Anwendungsbeispiel

Ein kontinuierliches Grauwertbild kann als Funktion $f(x,y)$ der beiden Ortsvariablen (x,y) aufgefasst werden.

$|\nabla f|$ ist ein einfacher Kantendetektor: Kanten befinden sich an Orten (x,y), in deren Umgebung der Grauwert stark variiert, d.h. in denen $|\nabla f(x,y)|$ groß ist. Die Kante verläuft senkrecht zur Richtung des steilsten Anstiegs (d.h. senkrecht zu ∇f).

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Ableitung höherer Ordnung auf Funktionen mehrerer Variabler.

52.8. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$.
Ist f partiell differenzierbar auf D und sind die partiellen Ableitungen selbst wieder partiell differenzierbar, erhält man als partielle Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Induktiv definiert man die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung durch $(i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\})$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)$$

für $k \geq 2$.

$f(x)$ heißt <u>k-fach partiell differenzierbar</u>, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung k:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}} := D_{i_k} \cdot \ldots \cdot D_{i_1} := \partial_{x_{i_k} \ldots x_{i_1}} := f_{x_{i_k} \ldots x_{i_1}}$$

existieren. Sind sie sogar stetig, so heißt $f(x)$ <u>k-fach stetig differenzierbar</u> (<u>C^k-Funktion</u>). Stetige Funktionen werden auch als <u>C^0-Funktionen</u> bezeichnet.

Spielt die Reihenfolge, in der man die partiellen Ableitungen berechnet, eine Rolle? Man kann folgendes Resultat zeigen:

52.9. Satz (<u>Vertauschbarkeitssatz von Schwarz</u>)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$. Falls f eine C^2-Funktion ist, sind die partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

<u>Folgerung</u>:

Ist f eine C^k-Funktion, so kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k beliebig vertauschen.

52.10. Beispiel:

Für die Funktion

$$f(x,y,z) := z^2 \sin(x^3) + (\cos y \sin x - e^{-x}) z^2$$

soll f_{xyz} berechnet werden:

Klar: $f(x,y,z)$ ist C^3-Funktion.

Wenn man zuerst nach y partiell differenziert, fallen einige Terme sofort weg:

$$f_{xyz} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(f_y)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(-(\sin y \sin x) z^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2z \sin y \sin x\right)$$

$$= -2z \sin y \cos x.$$

Im Gradienten treten alle partielle Ableitungen 1. Ordnung auf. Gibt es einen Ausdruck, in dem alle part. Ableitungen 2. Ordnung auftreten?

52.11. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ in $\xi \in D$ zweimal partiell differenzierbar. Dann nennt man die Matrix

$$Hf(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\xi) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\xi) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f in ξ.

Bem.:

a) Für eine C^2-Funktion ist die Hesse-Matrix nach dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz symmetrisch.

b) Wir werden sehen, dass die Hesse-Matrix eine große Rolle bei der Klassifikation von Extrema einer Funktion mehrerer Variabler spielt (Unterscheidung Maxima – Minima).

Ähnlich wie wir aus ∇f die wichtige rotationsinvariante Größe $|\nabla f|$ betrachtet haben, können wir auch aus Hf eine rotationsinvariante skalare Größe gewinnen. Hierzu betrachten wir die Summe der Diagonalelemente (<u>Spur</u>) von Hf:

52.12. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und f in $\xi \in D$ zweimal stetig differenzierbar. Dann nennt man

$$\Delta f(\xi) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\xi)$$

den <u>Laplace-Operator</u> von f in ξ.

<u>Bem.</u>: a) Beachte den Unterschied zwischen dem Nabla-Operator ∇ und dem Laplace-Operator Δ.

b) In der Bildverarbeitung verwendet man beispielsweise den Laplace-Operator zur Lokalisierung von Kanten. Kanten werden definiert als Orte, an denen der Laplace-Operator einen Nulldurchgang macht.

52.13. Anwendung: Partielle Differentialgleichungen

Viele Prozesse in der Physik und den Ingenieurswissenschaften lassen sich durch Gleichungen beschreiben, die Beziehungen zwischen einer gesuchten Funktion (z.B. Druck, Temperatur, Konzentration, ...) und ihren partiellen Ableitungen der Ordnung ≤ 2 festlegt.
(partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Beispiele:

a) Laplace-Gleichung (Potentialgleichung)

$$\Delta u = 0$$

Spielt z.B. eine Rolle bei statischen Problemen in der Elastizitätstheorie.
Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfüllen, nennt man harmonische Funktionen.

b) Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u$$

Tritt bei Schwingungsproblemen auf, z.B. der Ausbreitung von Schallwellen. t beschreibt hierbei die Zeit, und $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ misst die örtliche Veränderung.

c) Diffusionsgleichung, Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u$$

Beschreibt die Dynamik von Ausgleichsprozessen wie Diffusion und Wärmeleitung. u ist hierbei die Konzentration bzw. Temperatur, und t die Zeit.
In der Bildverarbeitung verwendet man Diffusionsprozesse zum Entrauschen (Diffusionsfilter):
u beschreibt den Grauwert, und die „Diffusionszeit" t ist ein Maß für die Glättung.

Bisher haben wir nur Ableitungen einer Funktion f von mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$ längs der Koordinatenrichtungen $e_1, \dots, e_n$ betrachtet. Können wir dies auf beliebige Richtungen verallgemeinern?

52.14. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$.
Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ heißt

$$D_v f(\xi) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$$

die Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung) von f in Richtung v.

52.15. Bemerkungen

a) Für $v = e_i$ liefert die Richtungsableitung gerade die i-te partielle Ableitung.

$$D_{e_i} f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$$

Dies folgt sofort aus Def. 52.2 und Def. 52.14.

b) Statt $D_v f$ schreibt man oft auch $\frac{\partial f}{\partial v}$.

c) Die Richtungsableitung $D_v f(\xi)$ beschreibt den Anstieg (die Steigung) von $f(\xi)$ in der Richtung v.

Gibt es ein einfaches Verfahren, wie man Richtungsableitungen berechnet? Man kann zeigen:

52.16. Satz (Darstellung der Richtungsableitung durch den Gradienten)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}$ sei in ξ stetig differenzierbar. Dann existiert die Richtungsableitung $D_v f$ für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$, und es gilt:

$$D_v f(\xi) = v^T \nabla f(\xi)$$

52.17. Beispiel

$f(x,y) = e^{-x} \sin y$

Gesucht ist die Richtungsableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi/6 \end{pmatrix}$.

$f_x(x,y) = -e^{-x}\sin y \quad \Rightarrow \quad f_x(0,\tfrac{\pi}{6}) = (-1)\cdot\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}$

$f_y(x,y) = e^{-x}\cos y \quad \Rightarrow \quad f_y(0,\tfrac{\pi}{6}) = 1\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$v = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$$(D_v f)(0,\tfrac{\pi}{6}) = v^T \nabla f(0,\tfrac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= -\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

52.18. <u>Bemerkungen</u>

a) Für $\nabla f \neq 0$ nimmt die Richtungsableitung ihren größten Wert an für $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Dann gilt:

$$D_v f = v^T \nabla f = \frac{(\nabla f)^T}{|\nabla f|}\nabla f = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|.$$

Daher zeigt der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs.

b) In der Gegenrichtung $v = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ gilt:

$$D_v f = -\frac{(\nabla f)^T}{|\nabla f|}\nabla f = -|\nabla f|$$

c) Wählt man eine Richtung v, die orthogonal zu ∇f ist, erhält man

$$D_v f = \frac{(\nabla f^\perp)^T}{|\nabla f^\perp|}\nabla f = 0.$$

Somit ist die Steigung Null, wenn wir uns senkrecht zum Gradienten bewegen: $\nabla f(\xi)$ steht in ξ senkrecht zur Höhenlinie

$\{x \in D \mid f(x) = f(\xi)\}$