§ 50: MATRIXNORMEN UND EIGENWERTABSCHÄTZUNGEN

50.1. Motivation

Problem: – Kann man die Eigenwerte einer Matrix mit geringem Aufwand abschätzen?
– Dies spielt z.B. eine Rolle bei Konvergenzbetrachtungen von iterativen Algorithmen.

Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu sind Matrixnormen.

50.2. Def.:

Unter einer Matrixnorm versteht man eine Funktion $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\|A\| = 0 \iff A = 0$

b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(Submultiplikativität)

50.3. Beispiele

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Gesamtnorm: $\|A\|_G := n \cdot \max_{i,k} |a_{ik}|$

b) Zeilensummennorm: $\|A\|_Z := \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$

c) Spaltensummennorm: $\|A\|_S := \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$

d) Frobeniusnorm : $\|A\|_F := \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$

e) Spektralnorm : $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$

wobei $\lambda_{max}(A^TA)$ der größte Eigenwert von A^TA ist.

Falls A symmetrisch: $\|A\|_2 = \max_k \{ |\lambda_k| \mid \lambda_k \text{ Eigenwert von } A \}$

Da Matrizen und Vektoren oft gemeinsam auftreten, sollten Matrix- und Vektornormen verträglich sein:

50.4. Def.: Eine Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ heißt kompatibel (verträglich) mit einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$, falls gilt:

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

50.5. Beispiele

Zu den p-Normen

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

bestehen folgende Verträglichkeiten:

a) $\|A\|_G$, $\|A\|_S$ sind kompatibel zur Betragssummennorm $\|x\|_\infty$.

b) $\|A\|_G$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$ sind kompatibel zur euklidischen Norm $\|x\|_2$.

c) $\|A\|_G$, $\|A\|_Z$ sind kompatibel zur Maximumsnorm $\|x\|_\infty$.

Beweis: Wir zeigen nur die Kompatibilität von $\|A\|_G$ und $\|x\|_\infty$:

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left\{ \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \right\}$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \right\} \quad \text{Dreiecksungleichungen}$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{r,s} |a_{rs}| \max_l |x_l| \right\}$$

$$= n \cdot \max_{r,s} |a_{rs}| \cdot \max_l |x_l|$$

$$= \|A\|_G \cdot \|x\|_\infty .$$

Da zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|_V$ oftmals viele kompatible Matrixnormen $\|\cdot\|_M$ existieren, verwendet man in der Praxis gerne diejenige, für die die Abschätzung

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$$

am schärfsten ist:

50.6. Def.: Die zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$ definierte Zahl

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

heißt <u>zugeordnete Matrixnorm</u>.

<u>Bem.</u>: Man kann zeigen, dass die zugeordnete Matrixnorm alle Eigenschaften von Def. 50.2 besitzt und die kleinste aller Matrixnormen ist, die zu einer vorgegebenen Vektornorm kompatibel sind.

50.7. Beispiele: Man kann zeigen:

Vektornorm		zugeordnete Matrixnorm
Betragssummennorm	$\|x\|_1$	Spaltensummennorm $\|A\|_S$
euklid. Norm	$\|x\|_2$	Spektralnorm $\|A\|_2$
Maximumsnorm	$\|x\|_\infty$	Zeilensummennorm $\|A\|_Z$

Matrixnormen sind nützlich zur Abschätzung von Eigenwerten:

50.8. Satz (Eigenwertabschätzung mit Matrixnormen)

Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|A\|$ eine beliebige, zu einer Vektornorm kompatible Matrixnorm, so gilt:

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Beweis: Sei v ein Eigenvektor zu λ

$$\Rightarrow \quad |\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

Da $v \neq 0$, gilt $\|v\| \neq 0$. Daher ist $|\lambda| \leq \|A\|$. □

50.9. Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_G = 3 \max_{i,k} |a_{ik}| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\|A\|_Z = \max \{1{,}2;\ 2{,}4;\ 3{,}2\} = 3{,}2$$

$$\|A\|_S = \max \{1{,}2;\ 2{,}1;\ 3.5\} = 3{,}5$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 0{,}1^2 + (-0{,}1)^2 + 2^2 + 0{,}4^2 + (-0{,}2)^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{14{,}22} \approx 3{,}77$$

$\|A\|_z$ liefert die schärfste Abschätzung:

$$|\lambda| \le \|A\|_z = 3{,}2$$

Tatsächlich gilt:

$$\lambda_1 \approx 3{,}0060$$
$$\lambda_2 \approx 2{,}0078$$
$$\lambda_3 \approx 0{,}9862$$

Offenbar erlaubt Satz 50.8 nur die Abschätzung des betragsgrößten Eigenwerts. Gibt es auch Abschätzungen für alle Eigenwerte?

50.10. Satz (Satz von Gerschgorin)

a) Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i := \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{ii}| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} |a_{ik}|\}$$

enthält alle Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

b) Jede Zusammenhangskomponente aus m solchen Kreisen enthält genau m Eigenwerte (der Vielfachheit nach gezählt).

Beweis: siehe z.B.

Stoer / Bulirsch: Einführung in die numerische Mathematik II. Springer, Berlin.

5.11. Beispiel

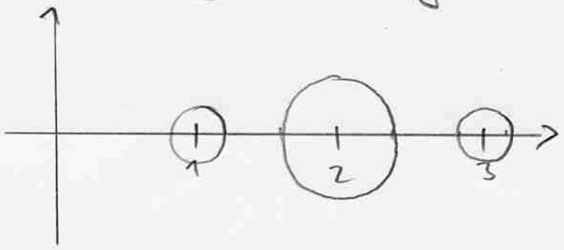
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 1| \le 0{,}2 \}$

$K_2 = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 2| \le 0{,}4 \}$

$K_3 = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - 3| \le 0{,}2 \}$

Sämtliche Eigenwerte liegen in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$:



Da K_1, K_2, K_3 nicht überlappen, liegt nach (6) in jedem der Kreisscheiben genau ein Eigenwert. Ferner ist A invertierbar, da 0 außerhalb von $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ liegt, also kein Eigenwert sein kann.

5.12. Korollar (Invertierbarkeit strikt diagonaldominanter Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant (d.h. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} |a_{ik}|$ für alle $i = 1, \ldots, n$), so ist A invertierbar.

Beweis: Nach dem Satz von Gerschgorin liegt 0 außerhalb der Gerschgorinkreisscheiben, kann also kein Eigenwert sein. □