§ 49 QUADRIKEN

49.1 Motivation

Quadriken (→ Def. 49.2) stellen eine wichtige Klasse geometrischer Objekte dar, mit Anwendungen in Computergrafik, Physik u.a.

Ziel: gegebene Quadrik auf einfache Form transformieren, sodass sich die geometrische Gestalt unmittelbar ablesen lässt.

49.2 Grundlegende Verfahrensweise

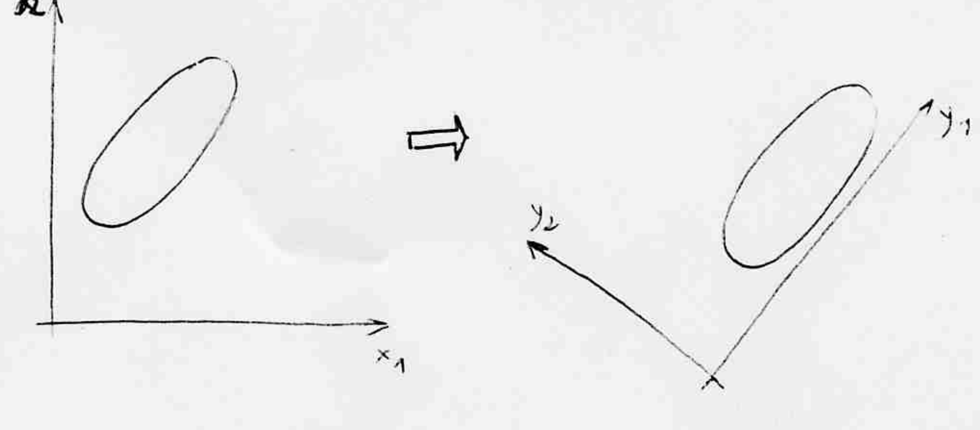
Gegeben: Quadrik

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 1: Elimination der gemischten quadratischen Terme

Hierzu wird das Koordinatensystem so gedreht, dass A in eine Diagonalmatrix übergeht.



Berechne dazu die Eigenwerte λ_i von A und eine ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren mit $\det(v_1 | \dots | v_n) = 1$.

(Falls $\det(v_1 | \dots | v_n) = -1$, ersetzt man v_1 durch $-v_1$)

Mit $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ gilt dann

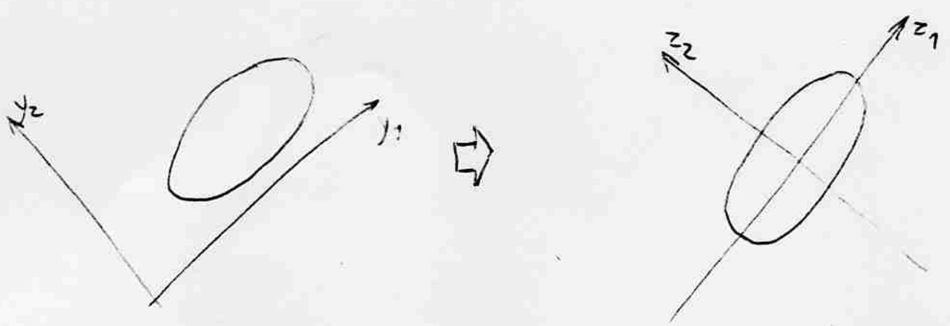
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q ,$$

und aus
$$x^T A x + b^T x + c = 0$$
folgt
$$x^T Q \Lambda Q^T x + b^T \underbrace{Q Q^T}_{=I} x + c = 0 .$$

Mit $y := Q^T x$, $\tilde{b} := Q^T b$ ergibt sich daher
$$y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c = 0$$
bzw. ausgeschrieben
$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + \tilde{b}_1 y_1 + \dots + \tilde{b}_n y_n + c = 0$$
(gemischte quadratische Terme weggefallen).

Schritt 2: Elimination linearer Terme (soweit möglich)

Durch Translation des Koordinatensystems kann erreicht werden, dass $\lambda_k y_k^2$ und $\tilde{b}_k y_k$ nicht zugleich vorkommen (für jedes k).



Es sei dazu o.B.d.A. $\lambda_i \neq 0$ für $i=1,\dots,r$ sowie $\lambda_{r+1}=\dots=\lambda_n=0$.

Für $i=1,\dots,r$ wird der lineare Term $\tilde{b}_i y_i$ durch die quadratische Ergänzung eliminiert:

$$z_i := y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} \qquad (i=1,\dots,r)$$

$$z_i := y_i \qquad (i=r+1,\dots,n)$$

Damit erhält man

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + \tilde{b}_{r+1} z_{r+1} + \dots + \tilde{b}_n z_n + \tilde{c} = 0$$

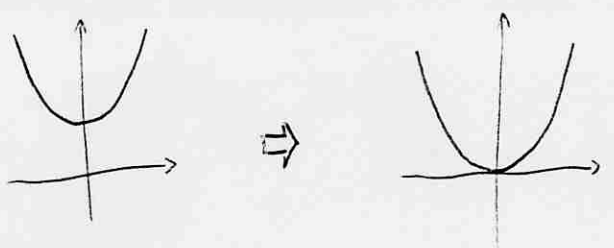
mit $\displaystyle \tilde{c} = c - \sum_{i=1}^{r} \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i}$ und $r = \operatorname{rang} A$.

Schritt 3: Elimination der Konstanten (falls möglich):

Ist einer der Koeffizienten $\tilde{b}_{r+1},\dots,\tilde{b}_n$ ungleich 0 (o.B.d.A. sei dies $\tilde{b}_n$), so kann $\tilde{c}$ eliminiert werden durch

$$z_n \longmapsto z_n - \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}_n}$$

(ebenfalls Translation des Koordinatensystems, z.B.



)

RESULTAT: Normalformen der Quadrik

Darstellung in Koordinatensystem, in dem möglichst viele Koeffizienten verschwinden.

Für $r := \operatorname{rang} A = n$: $\quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + d = 0$

Für $r < n$: entweder $\quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + e_{r+1} z_{r+1} + \dots + e_n z_n = 0$

oder $\quad \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + d = 0$.

49.3 Beispiel:

Die Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0$$

soll auf Normalform gebracht werden.

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}$, $c = 4$.

1. Schritt (Hauptachsentransformation von A):

Eigenwerte $\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = 4$; $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ mit $\det Q = 1$.

Mit $\Lambda = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\tilde{b} = Q^T b = \begin{pmatrix} -36 \\ 8 \end{pmatrix}$ ergibt sich für

$y = Q^T x$:

$$9y_1^2 + 4y_2^2 - 36y_1 + 8y_2 + 4 = 0.$$

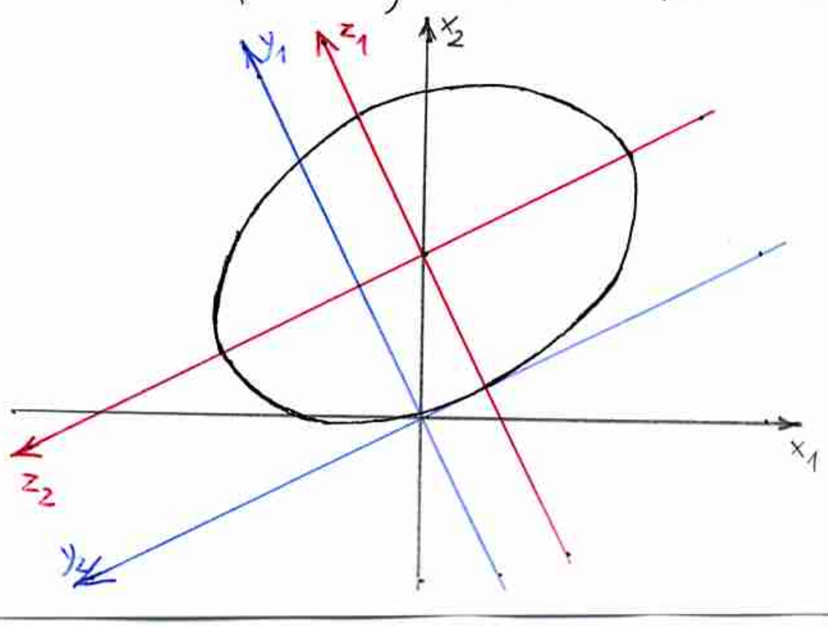
2. Schritt (Elimination der linearen Terme durch quadratische Ergänzung):

$$9(y_1^2 - 4y_1 + 4) + 4(y_2^2 + 2y_2 + 1) = -4 + 36 + 4$$

also mit $z_1 := y_1 - 2$, $z_2 := y_2 + 1$:

$$9z_1^2 + 4z_2^2 = 36$$

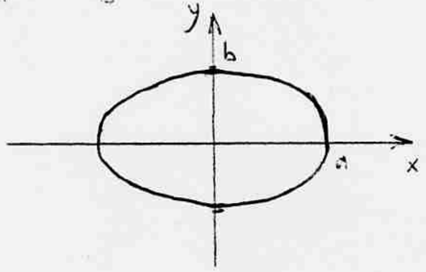
$$\Rightarrow \frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{9} = 1$$ Ellipse mit Halbachsen 2 und 3.



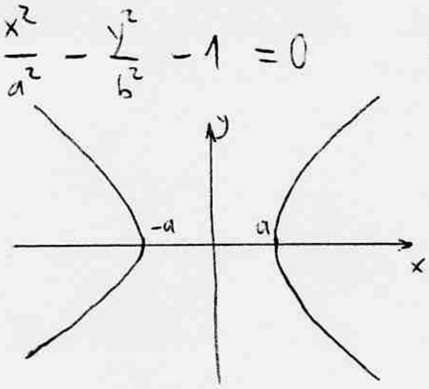
49.4 Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (Kegelschnitte)

(i) rang $A = 2$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Ellipse



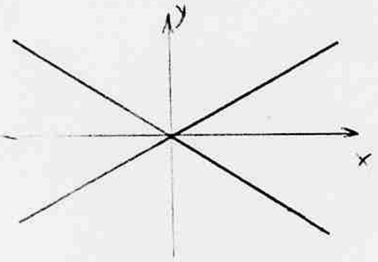
b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Hyperbel



c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ leere Menge

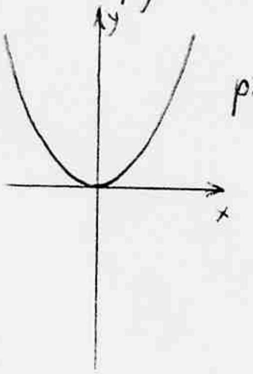
d) $x^2 + a^2y^2 = 0$, $a \neq 0$ Punkt $(0,0)$

e) $x^2 - a^2y^2 = 0$, $a \neq 0$ Geradenpaar $y = \pm \frac{1}{a} y$

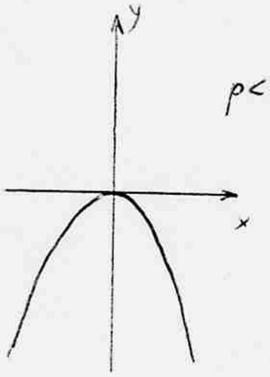


(ii) <u>rang $A = 1$</u> (ein Eigenwert $= 0$)

a) $x^2 - 2py = 0$ Parabel

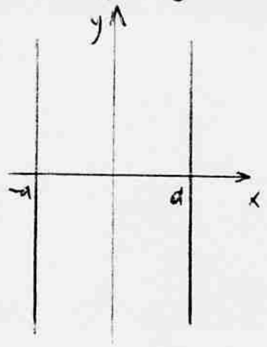


$p > 0$



$p < 0$

b) $x^2 - a^2 = 0$ parallele Geraden $x = \pm a$



c) $x^2 + a^2 = 0$ leere Menge

d) $x^2 = 0$ „Doppelgerade" $x = 0$ (y-Achse)

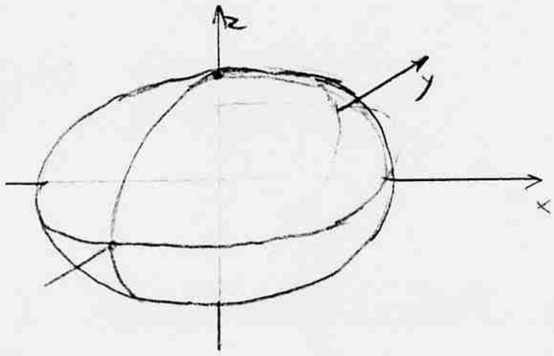
(iii) <u>rang $A = 0$</u> (alle Eigenwerte $= 0$):

$b_1 x + b_2 y + c = 0$ Gerade.

49.5. Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^3$

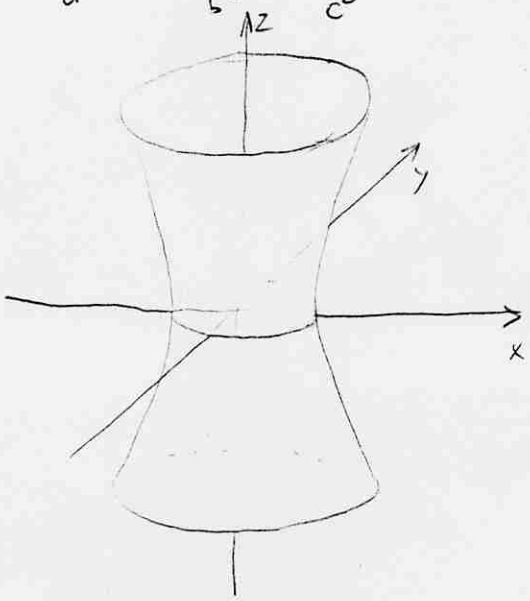
(i) rang $A = 3$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$ Ellipsoid



b) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$ leere Menge

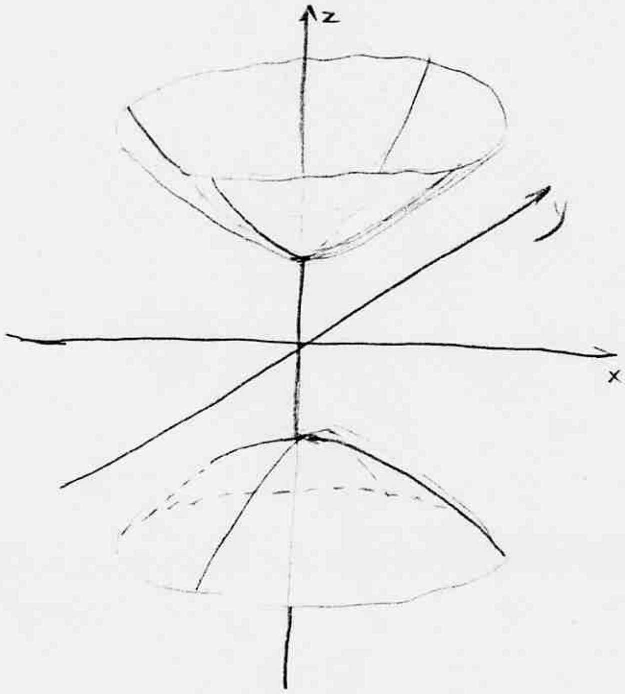
c) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$ einschaliges Hyperboloid



Ellipse in 1 Ebene (x-y-Ebene)

Hyperbel in 2 Ebenen (x-z, y-z)

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ zweischaliges Hyperboloid



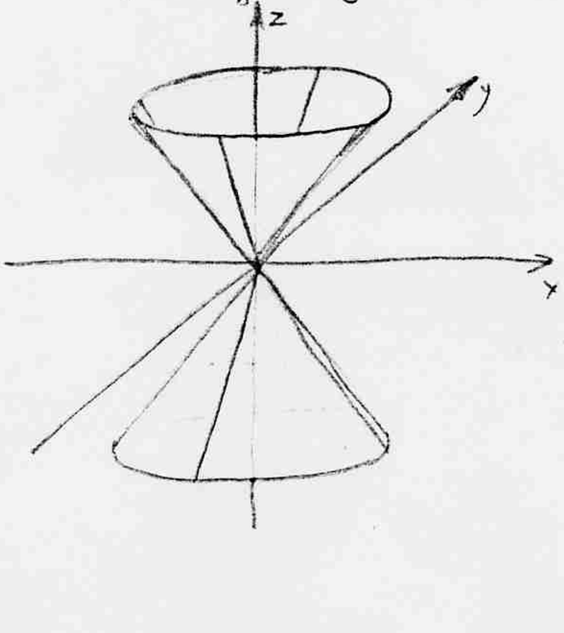
1
~~Ellipse in 1 Ebenen (x-y~~

Ellipse in 1 Ebene (x-y)

Hyperbel in 2 Ebenen (x-z, y-z)

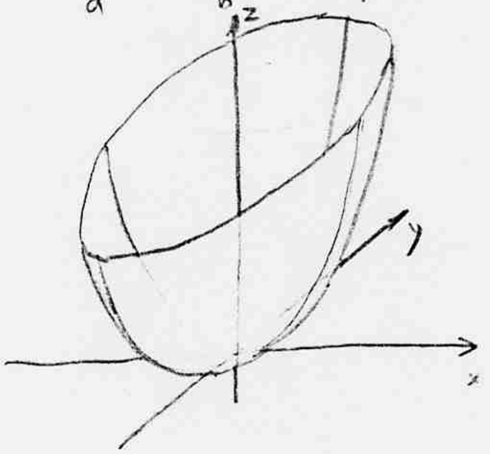
e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Punkt (0,0,0)

f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ elliptischer Kegel



ii) rang $A = 2$ (ein Eigenwert $= 0$)

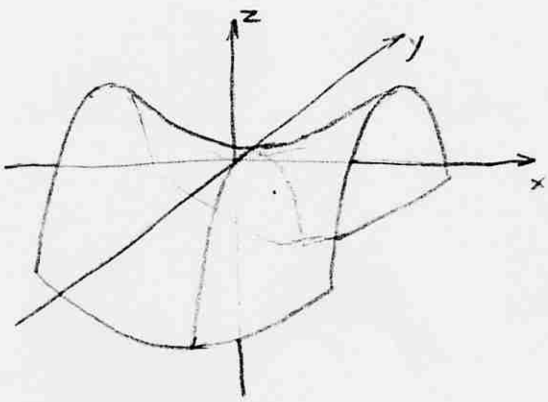
a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$ elliptisches Paraboloid



in 1 Ebene Ellipse $(x-y)$

in 2 Ebenen Parabel $(x-z, y-z)$

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$ hyperbolisches Paraboloid



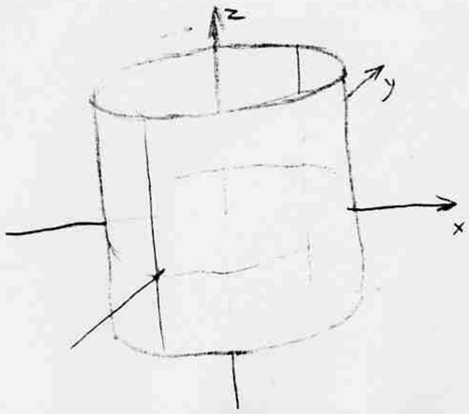
sattelartig

in 1 Ebene Hyperbel $(\parallel x-y)$

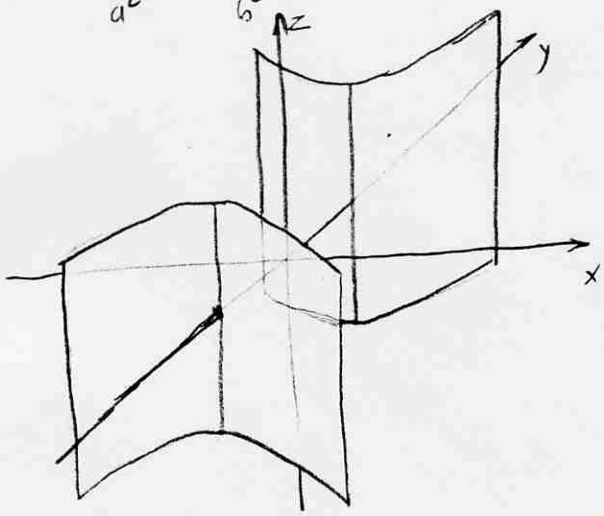
in 2 Ebenen Parabeln $(x-z, y-z)$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ leere Menge

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ elliptischer Zylinder

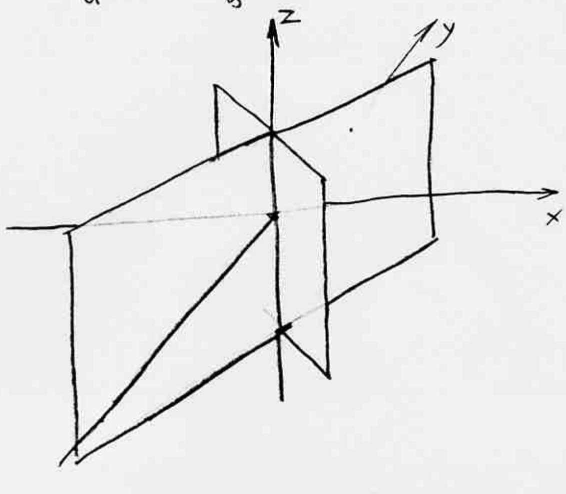


e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ hyperbolischer Zylinder



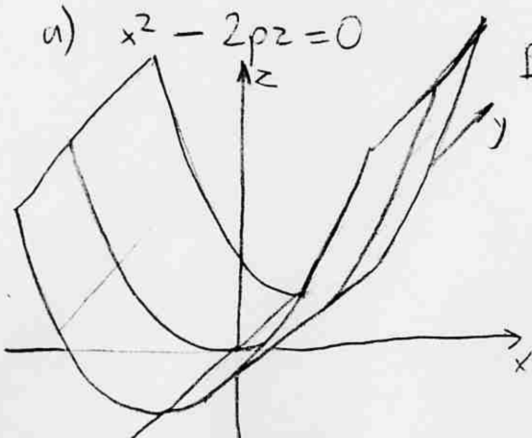
f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Gerade (z-Achse)

g) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Ebenenpaar mit Schnittgerade (z-Achse)



iii) rang $A = 1$

a) $x^2 - 2pz = 0$ parabolischer Zylinder



b) $x^2 - a^2 = 0$ <u>paralleles Ebenenpaar</u>

c) $x^2 + a^2 = 0$ <u>leere Menge</u>

d) $x^2 = 0$ <u>Ebene</u> (y-z-Ebene)

iv) <u>rang $A = 0$</u>

$b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$ <u>allg. Ebenengleichung</u>.

49.6 Satz

Auf dem einschaligen Hyperboloid und auf dem hyperbolischen Paraboloid gibt es jeweils zwei Scharen von Geraden.

<u>Beweis (für das einschalige Hyperboloid):</u>

Gleichung des einschaligen Hyperboloids. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Die Schnittkurve mit der x-y-Ebene ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

In jedem Punkt dieser Ellipse gibt es eine Berührungsebene an das Hyperboloid, und wir zeigen: Jede dieser Ebenen schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden.

<u>Fall 1:</u> Berührungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (a, 0, 0)$ oder $(-a, 0, 0)$.

In diesem Fall verläuft die Berührungsebene parallel zur y- <u>und</u> zur z-Achse. Ihre Gleichung ist daher $x = x_0$, also $x = \pm a$.

Der Schnitt der Ebene mit dem Hyperboloid besteht aus allen Punkten, die die Gleichungen beider Flächen erfüllen. Für jeden solchen Punkt muss also gelten $x = \pm a \quad \wedge \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

Einsetzen in Hyperboloidgl.

$$\Longleftrightarrow \quad x = \pm a \quad \wedge \quad 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \pm a \quad \wedge \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left(x = \pm a \ \wedge \ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0\right)}_{\text{1. Schnittgerade}} \vee \underbrace{\left(x = \pm a \ \wedge \ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0\right)}_{\text{2. Schnittgerade}}$$

<u>Fall 2</u>: Berührungspunkt (x_0, y_0, z_0) mit $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, $y_0 \neq 0$, und $z_0 = 0$.

Die Tangente an die Ellipse in der x-y-Ebene hat die Gleichung

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 .$$

Dies ist auch die Gleichung der Berührungsebene an das Hyperboloid, da diese parallel zur z-Achse ist. Schnittpunkte der Ebene mit dem Hyperboloid:

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\overset{y_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \quad \wedge \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung ergibt

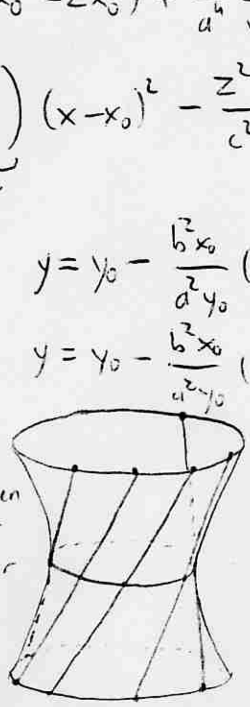
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 2\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{b^2}{a^4}\frac{x_0^2}{y_0^2}(x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 \\ &= \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} - 2\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{b^2}{a^4}\frac{x_0^2}{y_0^2}(x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{a^2}(x - x_0)(x + x_0 - 2x_0) + \frac{b^2}{a^4}\frac{x_0^2}{y_0^2}(x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} \\ &= \frac{1}{a^2}\underbrace{\left(1 + \frac{b^2 x_0^2}{a^2 y_0^2}\right)}_{=: e^2}(x - x_0)^2 - \frac{z^2}{c^2} \quad = \left(\frac{e}{a}(x - x_0) + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{e}{a}(x - x_0) - \frac{z}{c}\right) \end{aligned}$$

Schnittpunkte erfüllen also $\quad y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \ \wedge \ \frac{e}{a}(x - x_0) + \frac{z}{c} = 0$ (1. Schnittgerade)

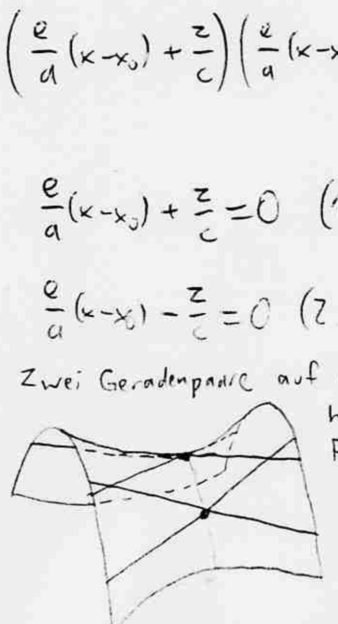
oder $\quad y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \ \wedge \ \frac{e}{a}(x - x_0) - \frac{z}{c} = 0$ (2. Schnittgerade)

Geradenpaar

Geraden einer Schar

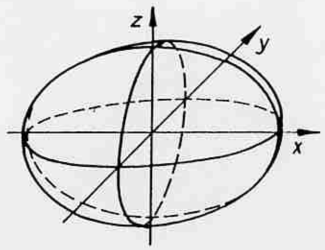


Zwei Geradenpaare auf dem hyperbol. Paraboloid

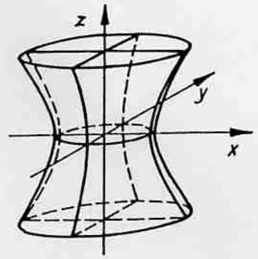


Beispiele für Quadriken im $\mathbb{R}^3$

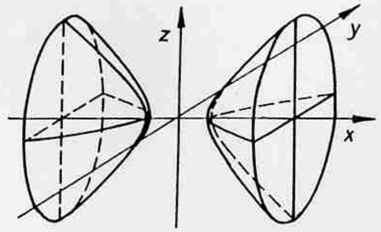
rang A = 3:



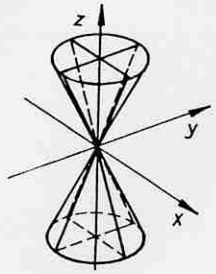
Ellipsoid



einschaliges Hyperboloid

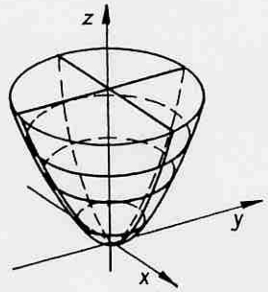


zweischal. Hyperboloid

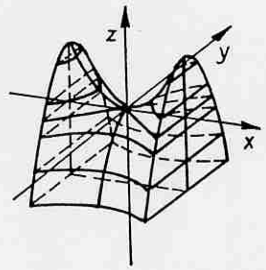


elliptischer Kegel

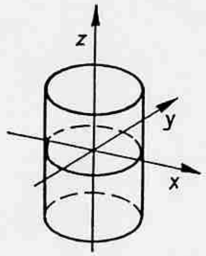
rang A = 2:



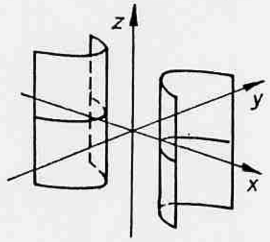
ellipt. Paraboloid



hyperbol. Paraboloid

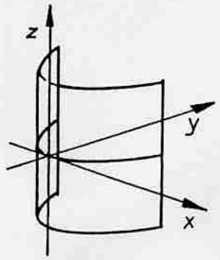


ellipt. Zylinder



hyperbol. Zylinder

rang A = 1:



parabol. Zylinder