§48 QUADRATISCHE FORMEN UND POSITIV DEFINITE MATRIZEN

48.1 Motivation

- Charakterisierung einer wichtigen Klasse symmetrischer Matrizen (Anwendungen in Computergrafik, Physik u.a.)
- Verhalten quadratischer Funktionen in mehreren Variablen untersuchen
- wichtige Klassen geometrischer Kurven/Flächen kennen lernen

48.2 DEF.: (quadratische Form; quadratisches Polynom; Quadrik)

Es sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.
Dann heißt

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

Ferner seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c$$

quadratisches Polynom in $x_1, \dots, x_n$.

Die Menge aller Punkte, die die quadratische Gleichung

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0$$

erfüllen, heißt Quadrik.

48.3 Beispiele:

a)
$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$
$$= 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_2$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Form.

b)
$$q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 7x_2 + 3$$

ist ein quadratisches Polynom.

c) Die Ellipsengleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$$

beschreibt eine Quadrik mit $n=2$.

Quadriken mit $n=2$ können generell als Kegelschnitte (Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, ...) interpretiert werden.
Für $n=3$ ergeben sich Ellipsoide, Paraboloide, Hyperboloide.

48.4 DEF.: (definite, semidefinite, indefinite Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die Eigenwerte von A.
Dann heißt A

- <u>positiv definit</u>, falls $\lambda_i > 0 \quad \forall i$
- <u>positiv semidefinit</u>, falls $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$
- <u>negativ definit</u>, falls $\lambda_i < 0 \quad \forall i$
- <u>negativ semidefinit</u>, falls $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i$
- <u>indefinit</u>, falls λ_i, λ_j existieren mit $\lambda_i \lambda_j < 0$.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen positiver Definitheit, quadratischen Formen und Determinanten von Untermatrizen.

48.5 Satz (Positiv definite Matrizen und quadratische Formen)

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

Dann ist A positiv definit genau dann, wenn

$$x^T A x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ $(x \neq 0)$:

$$x^T A x = \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right)^T A \left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i^T\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j \underbrace{A v_j}_{\lambda_j v_j}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \lambda_j x_i x_j \underbrace{v_i^T v_j}_{=0 \text{ für } i \neq j}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad > 0.$$

„$\Leftarrow$": Ist umgekehrt A nicht positiv definit, so existiert ein Eigenwert $\lambda \leq 0$ von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$. Damit ist

$$v^T A v = v^T \lambda v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{v^T v}_{> 0} \leq 0$$

im Widerspruch zu $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$. $\square$

Der Zusammenhang zwischen positiver Definitheit und Determinanten von Untermatrizen ist Gegenstand des folgenden Satzes. Er stellt ein wichtiges Kriterium zum Überprüfen der positiven Definitheit ohne Eigenwertberechnung dar.

48.6 SATZ (Hauptminorenkriterium):

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn ihre Hauptminoren

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

für $k = 1, \ldots, n$ positiv sind.

Bem.: Ein ähnliches Kriterium für Semidefinitheit anzugeben ist nicht so einfach, man muss dann alle quadratischen Untermatrizen (und nicht nur die Hauptminoren) einbeziehen.

48.7 Beispiel

Geg. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Ist A positiv definit?

Hauptminoren:

$$\det(2) = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(18 - 16) + (-9 + 12) - 3(-4 + 6)$$

$$= 4 + 3 - 6 = 1 > 0$$

$\Rightarrow A$ positiv definit. $\square$

Analog zu Quadratwurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen lassen sich auch „Wurzeln" aus positiv semidefiniten Matrizen definieren.

48.8 Satz (Wurzel einer positiv semidefiniten Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv semidefinit.
Dann existiert eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B^2 = A$.

Beweis: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $v_1, \dots, v_n$ die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Dann gilt mit $Q := (v_1 | \dots | v_n)$ und $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

dass $A = Q \Lambda Q^T$.

Wir setzen $\Lambda^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ und $B := Q \Lambda^{1/2} Q^T$.

Dann ist $B^2 = Q \Lambda^{1/2} \underbrace{Q^T Q}_{I} \Lambda^{1/2} Q^T = Q \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} Q^T = Q \Lambda Q^T = A$. □

Positiv und negativ definite Matrizen spielen eine wichtige Rolle beim Nachweis von Minima und Maxima von Funktionen mehrerer Variabler (→ Kap. E).

Gibt es obere und untere Schranken für Werte quadratischer Formen?

48.9 Def. (Rayleigh-Quotient)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Dann nennt man

$$R_A(x) := R(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$$

den Rayleigh-Quotienten.

Der RAYLEIGH-Quotient lässt sich durch die Eigenwerte von A abschätzen.

48.10 Satz (RAYLEIGH-Prinzip):

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt:

a) $\lambda_n \leq R(x) \leq \lambda_1$

b) Diese Grenzen werden tatsächlich angenommen:

$$\lambda_1 = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} R(x), \qquad \lambda_n = \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} R(x).$$

Beweis: a) Aus $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ folgt $x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$;

analog zum Beweis von Satz 48.5 ist außerdem

$$x^T A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

$$\Rightarrow \quad R(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \begin{cases} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \lambda_1 \\[2ex] \geq \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \lambda_n \end{cases}$$

b) Setzt man $x = v_k$, so folgt

$$R(v_k) = \frac{v_k^T A v_k}{v_k^T v_k} = \frac{v_k^T \lambda_k v_k}{v_k^T v_k} = \lambda_k$$

Insbesondere ist $R(v_1) = \lambda_1$, $R(v_n) = \lambda_n$. $\square$