§ 47: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN SYMMETRISCHER MATRIZEN

47.1. Motivation: Symmetrische Matrizen (d.h. $a_{ij} = a_{ji} \;\forall i,j$) kommen in der Praxis sehr häufig vor. Gibt es in diesem Fall besonders einfache Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren?

47.2 Satz: (Eigenwerte, -vektoren symmetrischer Matrizen)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

a) A hat nur reelle Eigenwerte.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} := x - iy$ die komplex konjugierte Zahl. Dann ist $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.
Für Vektoren und Matrizen definiert man die komplexe Konjugation komponentenweise.
Sei nun λ Eigenwert von A mit Eigenvektor v.

$$\Rightarrow \bar{\lambda}\bar{v}^T v = \overline{(\lambda v)}^T v = \overline{(Av)}^T v$$
$$= \bar{v}^T \bar{A}^T v$$
$$= \bar{v}^T A v \quad \text{da A reell und symm.}$$
$$= \bar{v}^T (\lambda v) = \lambda \bar{v}^T v.$$

Da $\bar{v}^T v \in \mathbb{R}$ und $\neq 0$ (Eigenvektoren sind $\neq 0$), ist $\bar{\lambda} = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Seien v_1, v_2 Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2.

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 v_1^T v_2 = (A v_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2$$

$$= v_1^T (A v_2) \qquad \text{(da } A \text{ symm.)}$$

$$= \lambda_2 v_1^T v_2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^T v_2$$

Also sind v_1 und v_2 orthogonal. $\square$.

47.3. <u>Beispiel</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ symmetrisch.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4$$

$$= \cancel{4} - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - \cancel{4} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

Zwei reelle Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$:

$(A - \lambda_1 I) v = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 2 lin. abh. Gleichungen

$x_1 + 2x_2 = 0$

$x_2 := s \Rightarrow x_1 = -2s$

Eigenraum: $\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$ Eigenvektor: z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5$:

$(A - \lambda_2 I)\, v = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 2 lin. abh. Gln.

$2x_1 - x_2 = 0$

$x_1 := s \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2s$

Eigenraum: $\left\{ \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$ Eigenvektor: z.B. $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

v_1 und v_2 sind orthogonal. $\square$

Symmetrische Matrizen lassen sich mit Hilfe ihrer Eigenvektoren und Eigenwerte elegant zerlegen:

47.4. Satz: (Hauptachsentransformation, Spektraldarstellung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Nach Satz 46.2 hat A ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit zugehörigen (nicht notw. versch.) reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist

$$A = Q \Lambda Q^T$$

mit der orthogonalen Matrix $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ und der Diagonalmatrix

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

47.5

Bemerkungen:

a) Das bedeutet, dass A auf Diagonalgestalt transformiert werden kann:

$$\Lambda = Q^T A Q$$

Durch den Übergang in das durch $Q = (v_1 | - | v_n)$ definierte Koordinatensystem hat A also eine besonders einfache Gestalt.

b) A läßt sich auch schreiben als

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \ldots + \lambda_n v_n v_n^T$$

An dieser Schreibweise erkennt man sofort, dass $\lambda_1, -, \lambda_n$ Eigenwerte und $v_1, -, v_n$ Eigenvektoren von A sind, denn

$$A v_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \underbrace{v_i^T v_k}_{0 \text{ für } i \neq k} = \lambda_k v_k .$$

Beweis von Satz 47.4:

Nach Satz 47.2 sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Verwendet man innerhalb jedes Eigenraums das Gram-Schmidt-Verfahren und normiert, entsteht ein ONS $\{v_1, -, v_n\}$ von Eigenvektoren von A. Somit ist $Q := (v_1 | \ldots | v_n)$ eine orthogonale Matrix. Die k-te Spalte von $Q^T A Q$ lautet

$$Q^T \underbrace{A v_k}_{\lambda_k v_k} = \lambda_k Q^T v_k = \lambda_k e_k \quad \text{mit } e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Stelle.}$$

Somit ist $$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} . \qquad \square$$

47.6. Beispiel

Transformiere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt.

Lösung:

Nach Beispiel 47.3 hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$, mit zugehörigen Eigenvektoren $w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normierung der Eigenvektoren ergibt

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$Q = (v_1 | v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

wie nach 47.5.(a) zu erwarten war.