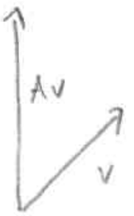
§ 46: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

46.1. Motivation

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind v und Av normalerweise nicht parallel:



Gibt es ausgezeichnete Richtungen v, so dass Av ein skalares Vielfaches von v ist?

$$Av = \lambda v$$

46.2. Def.: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ein von 0 verschiedener (!) Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Eigenvektor</u> von A, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Av = \lambda v$$

Der Skalar λ heißt dann <u>Eigenwert</u> von A.

46.3. Bedeutung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Eigenvektor- bzw. Eigenwertprobleme sind wichtig in der Statik, Elektrotechnik, Maschinenbau, Biologie, Informatik und den Wirtschaftswissenschaften. Oft beschreiben sie besondere Zustände von Systemen.

Beispiel:

1831 haben Soldaten eine Brücke zum Einsturz gebracht, indem sie mit einer Frequenz marschiert sind, die einen Eigenwert des Brückensystems getroffen hat. Es kam zur Resonanzkatastrophe. Seitdem geht man nicht mehr im Gleichschritt über Brücken.

46.4. Beispiel

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, denn

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3v$$

Der zugehörige Eigenwert ist 3.

Wie kann man Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen?

46.5. Bestimmung von Eigenwerten

Aus $Av = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

$v = 0$ ist als Eigenvektor ausgenommen, da stets $A \cdot 0 = 0$ ist.

Wir suchen also nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Sie ex. nur falls $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$, d.h. für

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dies ein Polynom n-ten Grades in λ (charakteristisches Polynom von A). Seine Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.

46.6. Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6$$

$$= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}.$$

46.7. Bemerkungen

a) Selbst wenn A nur reelle Einträge hat, kann das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen besitzen. Komplexe Eigenwerte sind also nicht ungewöhnlich.

b) Sucht man Eigenwerte einer $(n \times n)$-Matrix A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms, kann dies für $n \geq 3$ unangenehm werden. Für $n \geq 5$ ist dies i. A. nicht mehr analytisch möglich. Dann werden numerische Approximationen benötigt (ebenfalls nicht ganz einfach).

c) Man kann zeigen, dass $\det A$ das Produkt der Eigenwerte ist und dass A genau dann invertierbar ist, wenn der Eigenwert 0 nicht auftritt.

Trotzdem ist das charakteristische Polynom in Spezialfällen sehr nützlich, z.B. bei Dreiecksmatrizen:

46.8. Def.: Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
A heißt obere Dreiecksmatrix (untere Dreiecksmatrix), falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$ $(i < j)$ ist.
Ist $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, so ist A eine Diagonalmatrix.

46.9. Beispiele

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist obere Dreiecksmatrix

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist Diagonalmatrix und damit auch obere/untere Dreiecksmatrix

46.10. Satz (Eigenwerte von Dreiecksmatrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte durch die Diagonaleinträge gegeben.

Beweis: Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge.
Für $A = (a_{ij})$ folgt also aus

$$0 = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda)$$

dass die Eigenwerte durch

$$\lambda_1 = a_{11}, \ldots, \lambda_n = a_{nn}$$

gegeben sind. $\square$

46.11. Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$.

(vgl. Beispiel 46.4).

46.12. Bestimmung der Eigenvektoren

Ann.: Eigenwert λ der Matrix A sei bekannt.
Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)\, v = 0 \qquad (*)$$

Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt:
Mit v ist auch αv $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ Eigenvektor.
Der Lösungsraum von $(*)$ heißt Eigenraum von A zu Eigenwert λ. Man sucht daher nach Basisvektoren im Eigenraum und gibt diese als Eigenvektoren an.

46.13. Beispiel

Bestimme die Basen der Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: $0 = \det(A - \lambda I) = \ldots = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

i) Eigenraum zu $\lambda = 2$ ist Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 linear abhängige Gleichungen mit der Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Basis dieses Eigenraums ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. und 3. Gleichung sind linear abhängig.
Addition von Gl. 1 und 2:

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 := s \quad \Rightarrow x_3 = s$$

in Gl. 3: $\quad x_1 = -2x_3 = -2s$

Eindim. Eigenraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$$

wird z. B. vom Basisvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

46.14. Satz (Eigenwerte von Potenzen einer Matrix)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$ und λ sei Eigenwert von A mit Eigenvektor v. Dann ist λ^k Eigenwert von A^k mit zugehörigem Eigenvektor v.

Beweis:
$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1} v$$
$$= \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda^2 A^{k-2} v = \ldots = \lambda^k v. \qquad \square$$

46.15. Beispiel

A^7 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 46.13 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1^7 = 1$ und $\lambda_2 = 2^7 = 128$.