§ 45: ORTHOGONALE MATRIZEN

45.1. Motivation

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ haben wir gesehen, dass Orthonormalbasen zu besonders einfachen und schönen Beschreibungen führen.

Wir wollen nun das Konzept der Orthonormalität nicht mehr nur auf Vektoren beschränken, sondern auf Matrizen erweitern. Dies führt auf die wichtige Klasse von orthogonalen Matrizen, die eine Reihe von schönen Eigenschaften aufweisen. Mit ihnen lassen sich u.a. Drehungen und Spiegelungen beschreiben.

45.2. Def.:

Hat eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthonormale Spaltenvektoren $q_{*1}, \ldots, q_{*n}$, so handelt es sich um eine <u>orthogonale Matrix</u>. (orthonormale Matrix wäre präziser, ist aber unüblich). Man definiert ferner

$O(n) := \{ Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Q \text{ orthogonal} \}$.

Was sind nun die schönen Eigenschaften?

45.3. Satz (Eigenschaften orthogonaler Matrizen)

Ist $Q \in O(N)$, so gilt:

a) Q ist invertierbar, und Q^{-1} hat eine sehr einfache Form:

$$Q^{-1} = Q^T.$$

b) Multiplikation mit Q erhält das euklidische Produkt zweier Vektoren:

$$(Qu)\cdot(Qv) = u\cdot v \qquad \forall u,v\in\mathbb{R}^n$$

c) Multiplikation mit Q erhält die euklidische Norm:

$$|Qv| = |v| \qquad \forall v\in\mathbb{R}^n.$$

Man nennt Q daher auch <u>Isometrie</u>.

<u>Beweis</u>:

a) Sei $A=(a_{ij}) = Q^TQ$. Dann gilt:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = q_{*i}\cdot q_{*j} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Also ist $Q^TQ=I$. Analog zeigt man $QQ^T=I$.

Somit ist Q invertierbar und $Q^T=Q^{-1}$.

b)
$$\begin{aligned}(Qu)\cdot(Qv) &= (Qu)^T(Qv) \\ &= u^T \underbrace{Q^TQ}_{I} v \\ &= u^Tv = u\cdot v.\end{aligned}$$

c) Folgt aus (b) mit $u=v$. □

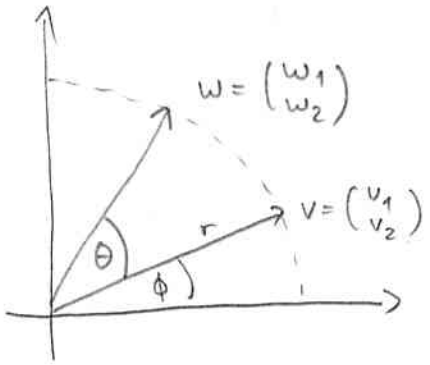
<u>Bem.</u>: Es gilt sogar: $Q^T=Q^{-1} \iff Q$ orthogonal

45.4. Beispiele

a) Rotationen können durch orthogonale Matrizen beschrieben werden:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

beschreibt Drehung um Winkel θ, denn:



$$v_1 = r\cos\phi$$

$$v_2 = r\sin\phi$$

$$w_1 = r\cos(\phi+\theta) = r(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta)$$

$$= v_1\cos\theta - v_2\sin\theta$$

$$w_2 = r\sin(\phi+\theta) = r(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta)$$

$$= v_2\cos\theta + v_1\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist die Drehung um $-\theta$:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = Q^T.$$

Somit ist Q orthogonal.

Beachte: $\det Q = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

b) Es gibt auch orthogonale Matrizen, die keine Drehungen beschreiben, z.B.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q beschreibt eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden, denn Q vertauscht x- und y-Komponente:

$$Q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\det Q = 0 - 1 = -1$

Kann die Determinante von orthogonalen Matrizen noch andere Werte als ± 1 annehmen? Nein!

45.5. Satz (Determinante orthogonaler Matrizen)

Ist $Q \in O(n)$, so gilt $|\det Q| = 1$.

Beweis: Aus $QQ^T = I$ folgt

$$1 = \det(I) = \det(QQ^T) = \det Q \cdot \det Q^T = (\det Q)^2. \quad \square$$

Orthogonale Matrizen Q mit $\det Q = 1$ sind noch einmal gesondert ausgezeichnet:

45.6. Def.: $SO(n) := O^+(n) := \{ Q \in O(n) \mid \det Q = 1 \}$

45.7. Satz (<u>Gruppeneigenschaft von $O(n)$ und $SO(n)$</u>)

$O(n)$ und $SO(n)$ sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Man nennt $O(n)$ die <u>orthogonale Gruppe</u> und $SO(n)$ die <u>spezielle orthogonale Gruppe</u>.

Beweis: Übungsaufgabe.

Wo treten orthogonale Matrizen noch auf?

Beim Wechsel von einer Orthonormalbasis in eine andere.

45.8. <u>Wechsel zwischen Orthonormalbasen</u>

<u>Problem:</u> Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis (ONB) des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Dann ex. zu jedem $u \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ mit

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k .$$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist also der <u>Koordinatenvektor</u> von u bzgl. der ONB $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei nun $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere ONB des $\mathbb{R}^n$ und u habe den Koordinatenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ bzgl. $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Gibt es eine <u>Übergangsmatrix</u> Q mit $b = Qa$?

Lösung: $u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} (v_k^T w_i) w_i \right)$ v_k durch $\{w_1, \dots, w_n\}$ ausgedrückt

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k (v_k^T w_i) \right) w_i$ Vertauschung der endl. Summation

$=: \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$

mit $b_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(v_k^T w_i)}_{=: q_{ik}} a_k$

Für die gesuchte Übergangsmatrix $Q = (q_{ik})$ gilt also:

$$q_{ik} = v_k^T w_i = w_i^T v_k$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline w_n^T \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n)}$$

Q ist das Produkt zweier orthogonaler Matrizen (warum ist $\begin{pmatrix} w_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline w_n^T \end{pmatrix}$ orthogonal?) und damit nach 45.7 selbst wieder orthogonal.