§ 44: FOURIERREIHEN

44.1 Motivation

Ähnlich wie eine Taylorreihe eine Funktion durch ein Polynom approximiert, wollen wir eine Funktion durch ein trigonometrisches Polynom annähern.

Hierzu verwenden wir den Approximationssatz 9.18.

44.2. Herleitung der Fourierkoeffizienten

Geg.: • Vektorraum $V = C[0, 2\pi]$ mit Skalarprodukt

$$\langle u,v \rangle := \int_0^{2\pi} u(x)\, v(x)\, dx. \quad \text{und Norm } \|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

• Funktion $u \in V$,

• endlich dimensionaler Unterraum:

$$W = \text{span}\,\{\underbrace{1}_{=:v_0}, \underbrace{\cos x}_{v_1}, \underbrace{\cos(2x)}_{v_2}, \dots, \underbrace{\cos(nx)}_{v_n}, \underbrace{\sin x}_{v_{n+1}}, \underbrace{\sin(2x)}_{v_{n+2}}, \dots, \underbrace{\sin(nx)}_{v_{2n}}\}$$

trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Ges.: Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ so dass das trigonometrische Polynom

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]}$$

die beste Approximation an $u(x)$ bzgl. der induzierten Norm $\|\cdot\|$ ist ("Approximation im quadratischen Mittel").

Diese Koeffizienten heißen Fourierkoeffizienten.

Lösung: Nach Satz 9.18 ist die Approximation im quadratischen Mittel durch die Orthogonalprojektion

$f = \text{proj}_W u$ gegeben.

Nach Übungsblatt 1, Aufgabe 3 sind $\{1, \cos x, \dots, \sin(nx)\}$ linear unabhängig:

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\, dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases} \qquad (k, l \geq 1)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l \geq 1) \\ 2\pi & (k = l = 0) \end{cases}$$

Nach Satz 9.15 lautet damit die Orthogonalprojektion

$$f = \operatorname*{proj}_W u = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\langle u, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} v_k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\langle u, 1\rangle + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\Big(\langle u, \cos(kx)\rangle \cos(kx) + \langle u, \sin(kx)\rangle \sin(kx)\Big)$$

Somit lauten die Fourierkoeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\langle u, 1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\,dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\langle u, \cos(kx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\cos(kx)\,dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\langle u, \sin(kx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\sin(kx)\,dx \end{aligned} \Bigg\} \; k = 1,\ldots,n}$$

44.3. Beispiel.

Die Funktion $u(x) = x$ soll auf $[0, 2\pi]$ im quadratischen Mittel mit einem trigonometrischen Polynom vom Grad $\leq n$ approximiert werden.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{x\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx\Big)$$

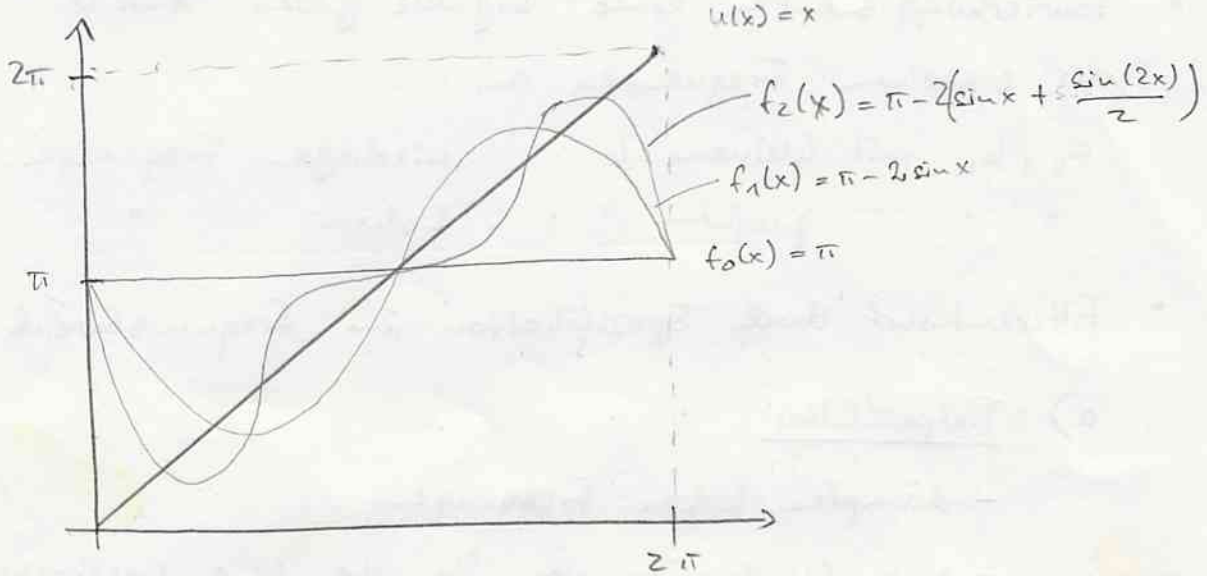
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad (k \geq 1)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\,dx = \Big(-x\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\,dx\Big)\cdot\frac{1}{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi}{k}\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k} \qquad (k \geq 1)$$

Das trigonometrische Approximationspolynom lautet also

$$f_n(x) = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin(nx)}{n}\right)$$



44.4. Def.: Läßt man den Grad des trigonometrischen Approximationspolynoms gegen ∞ streben, entsteht die <u>Fourierreihe</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

mit $\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\cos(k\pi)\,dx \qquad k = 0, 1, \ldots$

$\quad\quad\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\sin(k\pi)\,dx \qquad k = 1, 2, \ldots$

Bem.: Falls u differenzierbar ist, kann man zeigen, dass die Fourierreihe punktweise gegen u konvergiert.

An Sprungstellen zeigen die Fourierpolynome ausgeprägtes Über- und Unterschwingen (<u>Gibbs-Phänomen</u>)

44.5. Praktische Bedeutung

- Fourierreihen sind unentbehrlich in der Signalverarbeitung
- Fourierkoeffizienten eines Signals geben Anteile der einzelnen Frequenzen an:

  a_k, b_k mit kleinem k : niedrigen Frequenzen
  " " " großem " : hohen "

- Filterentwurf durch Spezifikation im Frequenzbereich

  a) Tiefpassfilter:
  - dämpfen hohen Frequenzen
  - zur Elimination von Rauschen (i. A. hochfrequent)

  b) Hochpassfilter:
  - dämpfen tiefen Frequenzen
    (z. B. Brumm- und Rumpelgeräusche)

  c) Bandpassfilter.
  - lassen nur vorgegebenen Frequenzbereich passieren
    (z. B. mittlere Frequenzen bei Stimmübertragung)

- ähnliche Bedeutung in der Bildverarbeitung: Grauwertbilder sind 2-D Signale
- Signale und Bilder liegen meist diskret (gesampelt) vor. Dann verwendet man eine diskrete Fouriertransformation, die Integrale durch Summen ersetzt
- Es existieren sehr schnelle Algorithmen zur diskreten Fouriertransformation, die ein Signal mit N Werten mit einer Komplexität von $O(N \log N)$ in seine Frequenzanteile zerlegen.
  (FFT = Fast Fourier Transform)

44.6 Aktuelle Weiterentwicklung: Wavelets

- verwenden Basisfunktionen, die nicht nur in der Frequenz, sondern auch im Ort lokalisiert sind.
- effizientesten Verfahren zur Signal- und Bildkompression (in zukünftigen jpeg- und mpeg-Standards): viele der Waveletkoeffizienten sind sehr klein und können weggelassen werden, ohne dass es auffällt.
- hocheffiziente Algorithmen mit $O(N)$-Komplexität.