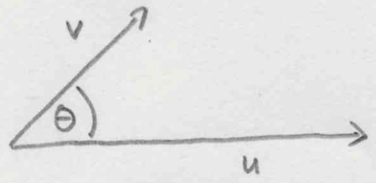
§ 43: ORTHOGONALITÄT

43.1. Motivation



Das euklidische Produkt zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$, die einen Winkel θ einschließen, lautet:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos \theta$$

Ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, so ist $u \cdot v = 0$ und u und v sind orthogonale Vektoren.

Wir wollen nun diese Begriffe des Winkels und der Orthogonalität in allgem. Prä-Hilbert-Räumen formulieren. Dies führt zu Darstellungen in Orthogonalbasen, die wichtige Anwendungen in der Informatik haben, z. B. in der geometrischen Datenverarbeitung, der Bildverarbeitung und im Information Retrieval.

43.2. Def.: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit induzierter Norm $\|\cdot\|$. Für nicht verschwindende Vektoren $u, v \in V$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\theta \in [0, \pi)$ mit

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|},$$

die wir als Winkel zwischen u und v definieren.
Wir nennen u und v orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$ (und somit $\theta = \frac{\pi}{2}$).

43.3. Beispiele

a) Euklidischer Raum $\mathbb{R}^4$, $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$|u| = (16+9+1+4)^{1/2} = \sqrt{30}$$

$$|v| = (4+1+4+9)^{1/2} = \sqrt{18}$$

$$u \cdot v = -8+3+2-6 = -9$$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{-9}{\sqrt{30}\,\sqrt{18}} \approx -0{,}3873$$

$$\Rightarrow \theta \approx 1{,}968 \quad (\hat{=}\ 112{,}8^\circ)$$

b) $C[-1,1]$ mit Skalarprodukt

$$\langle u,v \rangle := \int_{-1}^{1} u(x)\,v(x)\,dx$$

Mit $u(x) := x$ und $v(x) = x^2$ ergibt sich

$$\langle u,v \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Die Funktionen $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ sind also orthogonal in $C[-1,1]$.

Satz 41.13 verallgemeinern wir zu

43.4. Satz (<u>Satz des Pythagoras in Prä-Hilbert-Räumen</u>)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Dann gilt für <u>orthogonale</u> (!) Vektoren $u, v \in V$:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

<u>Beweis:</u> $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u,v \rangle}_{0} + \|v\|^2$. $\square$

43.5. Beispiel

$C[-1,1]$ mit Skp. $\langle u,v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)\,v(x)\,dx$

Nach 43.3.(b) sind $u(x)=x$, $v(x)=x^2$ orthogonal.

$$\|u+v\|^2 = \int_{-1}^{1} (x+x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2+2x^3+x^4)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10+6}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\|v\|^2 = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Wie erwartet gilt also

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16+6}{5} = \|u+v\|^2$$

In Prä-Hilbert-Räumen ist es oft sinnvoll, Basen zu wählen, deren Elemente paarweise orthogonal sind.

43.6. Def.: Eine Menge von Vektoren in einem Prä-Hilbert-Raum heißt orthogonale Menge, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind. Haben sie außerdem die (induzierte) Norm 1, so heißt die Menge orthonormal.
Bildet eine Basis eines Prä-Hilbert-Raums eine orthogonale (orthonormale) Menge, spricht man von einer Orthogonalbasis (Orthonormalbasis).

43.7. Beispiel

$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine orthogonale Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, denn es gilt:

$$0 = u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 .$$

Zwar ist $|u_1| = 1$, aber wegen $|u_2| = \sqrt{2} = |u_3|$ ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ keine orthonormale Menge.

Um eine orthonormale Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ zu erhalten, muss man durch die euklidischen Normen dividieren:

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

43.8. Satz (Koordinatendarstellung in Orthonormalbasis)

Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann gilt für jeden Vektor $u \in V$:

$$\boxed{u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n}$$

Beweis: Da S Basis ist, ex. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$$\Rightarrow \langle u, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Wegen $\langle v_i, v_k \rangle = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$ gilt: $\langle u, v_k \rangle = \alpha_k$ für $k = 1, \dots, n$.

$\square$

43.9. Beispiel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$.

Man schreibe $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.

$$u \cdot v_1 = 2$$

$$u \cdot v_2 = -\frac{4}{5} + 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

$$u \cdot v_3 = \frac{3}{5} + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{31}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{5} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{31}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

43.10. Satz (Koordinatendarstellung in Orthogonalbasis)

Sei $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann gilt für jedes $u \in V$:

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n .$$

Beweis: Aus der Orthogonalbasis S erhält man durch Normierung die Orthonormalbasis $S' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$. Nach Satz 43.8 gilt:

$$u = \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

$$= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n . \qquad \square .$$

Bem.: Unter Zusatzvoraussetzungen gelten ähnliche Aussagen auch in unendlich dimensionalen Prä-Hilbert-Räumen.

43.11 Satz (Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Mengen)

Eine orthogonale Menge $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus von 0 verschiedenen Elementen ist linear unabhängig.

Beweis: Wir zeigen, dass aus $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ stets $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ folgt.

Sei also $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Dann gilt für jedes v_k, $k = 1, \dots, n$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \\
&= \alpha_k \|v_k\|^2, \quad \text{da } \langle v_i, v_k \rangle = 0 \text{ für } i \neq k.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \alpha_k = 0$. □.

43.12. Beispiel

Aus Beispiel 43.7 wissen wir, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

eine orthonormale Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ist.

Nach Satz 43.11 sind dies drei linear unabhängige Vektoren.

Sie bilden somit eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Nach Satz 43.11 wissen wir, dass orthogonale Mengen linear unabhängig sind.
Kann man umgekehrt aus einer linear unabhängigen Menge eine orthogonale Menge konstruieren?

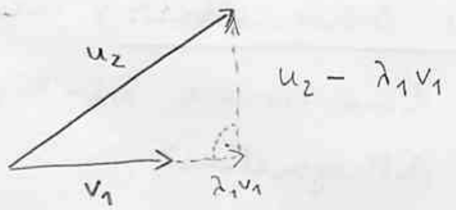
43.13 Orthogonalisierungsalgorithmus von Gram und Schmidt

Geg.: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbert-Raum mit endlich dimensionalem Unterraum W.
W habe Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Ges.: Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von W.

Schritt 1: $\boxed{v_1 := u_1}$.

Schritt 2:



$\lambda_1 v_1$ ist das Lot von u_2 auf $\operatorname{span}\{v_1\}$.

Ansatz $v_2 := u_2 - \lambda_1 v_1$ mit Forderung $\langle v_2, v_1 \rangle \stackrel{!}{=} 0$
erlaubt die Bestimmung von λ_1:

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2 - \lambda_1 v_1, v_1 \rangle$$

$$= \langle u_2, v_1 \rangle - \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1}$$

Seien $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ orthogonal für $n \geq 2$.

Schritt n: Ansatz $v_n := u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ mit Forderungen $\langle v_n, v_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$ führt auf:

$$0 = \langle v_n, v_j \rangle = \langle u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i, v_j \rangle$$

$$= \langle u_n, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_j = \frac{\langle u_n, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i}$$

Der Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren liefert somit einen konstruktiven Beweis von

43.14 Satz (Existenz einer Orthogonalbasis)

Jeder endlich dimensionale Prä-Hilbert-Raum besitzt eine Orthogonalbasis.

Bem.: Ist der Raum vom Nullvektorraum verschieden, so erhält man eine Orthonormalbasis durch Normierung.

43.15 Beispiel:

Konstruiere aus $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthogonalbasis des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$. Konstruiere anschließend eine Orthonormalbasis.

Lösung:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/3}{2/3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist die gesuchte Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Die entsprechende Orthonormalbasis $\{q_1, q_2, q_3\}$ lautet

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}/3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

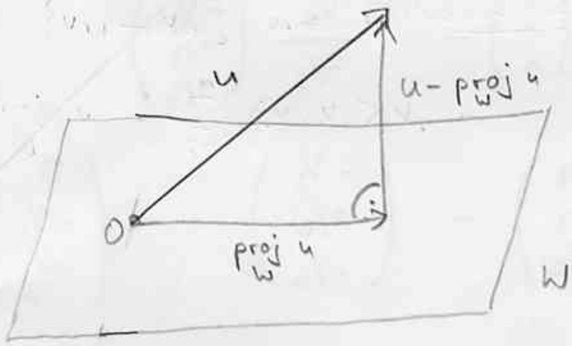
Ein weiteres "Abfallprodukt" des Gram-Schmidt-Verfahrens ist der

43.16 Satz: (Orthogonale Projektion auf Unterräume)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum, $u \in V$ und sei W ein endlich dimensionaler Unterraum mit Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Dann beschreibt

$$\operatorname{proj}_W u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

eine orthogonale Projektion von u auf W, d.h. $\operatorname{proj}_W u \in W$ und $\langle u - \operatorname{proj}_W u, w\rangle = 0 \quad \forall\, w \in W$.



Bem.: Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis, gilt also

$$\operatorname{proj}_W w = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle v_i$$

Ist die Orthogonalprojektion eindeutig?

43.17 Def.: Sei W ein Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dann bezeichnet

$$W^{\perp} := \{ v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \;\; \forall\, w \in W \}$$

das orthogonale Komplement von W.

43.18 Satz: (Projektionssatz)

Sei W ein endlich dimensionaler Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dann besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = w_1 + w_2$$

mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^{\perp}$. (d.h. $V = W \oplus W^{\perp}$).

<u>Beweis</u>: Es ist nur die Eindeutigkeit zu zeigen, die Existenz gilt wegen Satz 9.15.

Seien also $w_1, w_1' \in W$ und $w_2, w_2' \in W^\perp$ mit

$$v = w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$$

$$\Rightarrow \quad w_1 - w_1' = w_2' - w_2$$

$w_1 - w_1' \in W$, da Unterräume abgeschlossen sind.

Andererseits gilt

$$\langle w_2' - w_2, w \rangle = \underbrace{\langle w_2', w \rangle}_{0} - \underbrace{\langle w_2, w \rangle}_{0} = 0 \qquad \forall w \in W$$

d.h. $w_2' - w_2 \in W^\perp$.

Wegen $w_2' - w_2 = w_1 - w_1'$ gilt aber auch $w_2' - w_2 \in W$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle \overbrace{w_2' - w_2}^{\in W}, \overbrace{w_2' - w_2}^{\in W^\perp} \rangle = \| w_2' - w_2 \|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = w_2' - w_2 = w_1 - w_1'$$

und daher $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$ $\square$.

Gibt es weitere Anwendungen der Orthogonalprojektion?

<u>43.19 Satz</u>: (<u>Approximationssatz</u>)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und W ein endlich dimensionaler Unterraum.

Zu $v \in V$ ist dann $\operatorname{proj}_W v$ die beste Approximation von v in W, d.h.

$$\| v - \operatorname{proj}_W v \| < \| v - w \| \qquad \forall w \in W \text{ mit } w \neq \operatorname{proj}_W v$$

Beweis: $\| v - w \|^2 = \| \underbrace{v - \operatorname{proj}_W v}_{\in W^\perp} + \underbrace{\operatorname{proj}_W v - w}_{\in W} \|^2 =$

$$= \| v - \operatorname{proj}_W v \|^2 + \| \operatorname{proj}_W v - w \|^2 \qquad \text{Pythagoras}$$

$$\geq \| v - \operatorname{proj}_W v \|^2$$

Gleichheit gilt nur, falls $w = \operatorname{proj}_W v$. $\square$

43.20. <u>Beispiel</u>

$V = C[0, \frac{\pi}{2}]$ mit Skp. $\langle u, v \rangle := \int_0^{\pi/2} u(x)\, v(x)\, dx$.

Bestimme Gerade, die die Funktion $u(x) = \sin x$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ am besten (bzgl. der induz. Norm) approximiert.

Lösung: $W = \text{span}\{\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{x}_{v_2}\}$ Unterraum aller Geraden.

Ges.: $\text{proj}_W\, u = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i$ mit

$$0 = \langle u - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i, v_k \rangle \qquad k = 1, 2$$

In unserem Fall:

$$0 = \langle \sin x - \lambda_1 - \lambda_2 x, 1 \rangle$$

$$0 = \langle \sin x - \lambda_1 - \lambda_2 x, x \rangle$$

ergibt lineares Gleichungssystem für Unbekannten λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 \langle 1, 1 \rangle + \lambda_2 \langle x, 1 \rangle = \langle \sin x, 1 \rangle$$

$$\lambda_1 \langle 1, x \rangle + \lambda_2 \langle x, x \rangle = \langle \sin x, x \rangle$$

Mit $\langle 1, 1 \rangle = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$

$$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x\, dx = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\langle \sin x, 1 \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$$

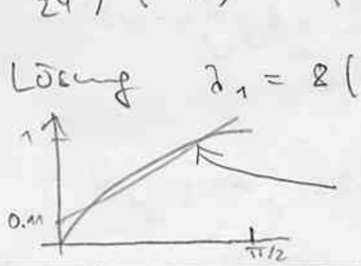
$$\langle \sin x, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x \sin x = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

lautet dieses System

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es hat die Lösung $\lambda_1 = 8\left(\frac{\pi - 3}{\pi^2}\right) \approx 0.11$, $\lambda_2 = 24\left(\frac{4-\pi}{\pi^3}\right) \approx 0.66$



Bestapprox. $f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$