§42 FUNKTIONALANALYTISCHE VERALLGEMEINERUNGEN

42.1 Motivation

Die Idee des euklidischen Produktes, Norm und Abstandes sollen abstrahiert werden, um diese Konzepte auch auf andere Räume übertragen zu können. Dies ist auch für die Anwendungen wesentlich, z.B. in der Signal- und Bildverarbeitung (z.B. Fouriertransformation).

42.2 Def.: Sei V ein reeller Vektorraum.
Ein Skalarprodukt (inneres Produkt) ist eine Funktion $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Symmetrie: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v \in V$

ii) Additivität: $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \quad \forall u,v,w \in V$

iii) Homogenität: $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha \langle u,v\rangle \quad \forall u,v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

iv) Nichtnegativität: $\langle v,v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

Nichtdegeneriertheit: $\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0.$

$(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ heißt Prä-Hilbert-Raum.

Bemerkung:

Ist V zudem vollständig (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert), so heißt $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ Hilbertraum.

42.3 Beispiele

a) Euklidische Räume

Der n-dimensionale euklidische Raum bildet einen Prä-Hilbert-Raum. Nach Satz 41.6 sind alle Eigenschaften von Def 42.2 erfüllt.

b) Gewichtete euklidische Räume

Seien $u = (u_1, u_2)^T$ und $v = (v_1, v_2)^T$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Dann wird durch

$$\langle u, v \rangle := 3 u_1 v_1 + 5 u_2 v_2$$

ein Skalarprodukt definiert.

Beweis: i) $\langle u, v \rangle = 3 u_1 v_1 + 5 u_2 v_2 = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$

ii) $$\begin{aligned} \langle u+v, w \rangle &= 3(u_1 + v_1) w_1 + 5(u_2 + v_2) w_2 \\ &= (3 u_1 w_1 + 5 u_2 w_2) + (3 v_1 w_1 + 5 v_2 w_2) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \qquad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

iii) $\langle \alpha u, v \rangle = 3 \alpha u_1 v_1 + 5 \alpha u_2 v_2 = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\langle v, v \rangle = 3 \underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + 5 \underbrace{v_2^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

Klar: $\langle v, v \rangle = 0 \iff v_1 = v_2 = 0$.

c) Polynomräume

Seien $p := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q := \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ Polynome vom Grad $\leq n$. Dann wird mittels

$$\langle p, q \rangle := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ zum Prä-Hilbert-Raum.

d) Funktionenraum $C[a,b]$

Sei $C[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \text{stetig auf } [a,b] \}$ und seien $f, g \in C[a,b]$. Dann wird $C[a,b]$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

zum Prä-Hilbert-Raum.

Läßt sich die euklidische Norm verallgemeinern?

42.4 Def.: Sei V ein reeller Vektorraum.
Unter einer Norm auf V versteht man eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\|v\| \geq 0 \qquad \forall v \in V$

ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\| \qquad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \forall u, v \in V.$

$(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung: Ein vollständiger normierter Raum heißt auch Banachraum.

42.5 Satz: (Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Prä-Hilbert-Räumen)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum. Dann gilt:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle \qquad \forall u, v \in V.$$

Beweis: Falls $u = 0$ ist, sind beide Seiten der Ungleichung 0.
Sei nun $u \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in V$:

$$0 \leq \langle ux+v, ux+v \rangle$$
$$= \underbrace{\langle u,u \rangle}_{=:a} x^2 + \underbrace{2\langle u,v \rangle}_{=:b} x + \underbrace{\langle v,v \rangle}_{=:c}$$

Die Parabel ax^2+bx+c hat also höchstens eine reelle Nullstelle. Die Diskriminante erfüllt also

$$0 \geq b^2 - 4ac$$
$$= 4\langle u,v \rangle^2 - 4\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle$$

Daraus folgt die Behauptung. □

42.6 <u>Satz</u>: (Induzierte Norm von Prä-Hilbert-Räumen)
Jeder Prä-Hilbert-Raum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wird mit

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$$

zum normierten Raum.

Beweis: i), ii) folgen direkt aus Def. 42.2 (iv).

zu iii)
$$\begin{aligned}
\|\alpha v\| &= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} && \text{Def.}\\
&= \sqrt{\alpha \langle v, \alpha v \rangle} && \text{Homogenität}\\
&= \sqrt{\alpha \langle \alpha v, v \rangle} && \text{Symmetrie}\\
&= \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} && \text{Homogenität}\\
&= |\alpha|\, \|v\| && \text{Def.}
\end{aligned}$$

zu iv)
$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle && \text{Def}\\
&= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle && \text{Additivität (+Symm.)}\\
&= \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2 && \text{Symm. + Def.}\\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 && \text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}\\
&= (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$
□

42.7 Beispiele

a) Norm einer stetigen Funktion

$C[a,b]$ wird mit

$$\|f\| := \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in C[a,b]$$

zum normierten Raum.

Beispielsweise hat $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1,2]$ die Norm

$$\|f\| = \sqrt{\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx} = \sqrt{\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2} = \sqrt{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Gewichtete euklidische Norm

Der $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2 \qquad \forall u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \forall v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

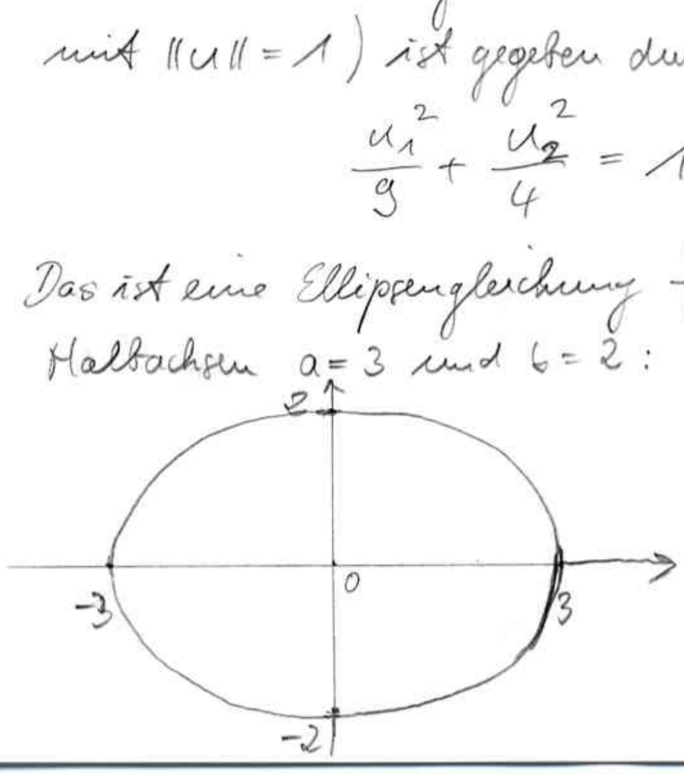
hat die induzierte Norm

$$\|u\| := \sqrt{\frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4}}.$$

Der Einheitskreis bzgl. dieser Norm (d.h. die Menge aller $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$) ist gegeben durch

$$\frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4} = 1.$$

Das ist eine Ellipsengleichung $\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1$ mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$:



Einheitskreise in solchen Normen sind nicht immer rund.

Kann man den Begriff des euklidischen Abstands verallgemeinern?

42.8 Def.: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $d: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls gilt

i) $d(u,v) \geq 0 \qquad \forall u,v \in V$

ii) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

iii) $d(u,v) = d(v,u) \qquad \forall u,v \in V$

iv) $d(u,v) = d(u,w) + d(w,v) \qquad \forall u,v,w \in V.$

(V,d) heißt metrischer Raum.

Bemerkung: Für vollständige metrische Räume gibt es keinen besonderen Namen.

42.9 Satz: (Induzierte Metrik eines normierten Raums)

Jeder normierte Raum $(V, \| \ \|)$ definiert mit

$$d(u,v) := \| u - v \| \qquad \forall u,v \in V$$

einen metrischen Raum (V,d).

Beweis: Einfache Folgerung aus Def. 42.4 $\square$

42.10 Beispiel: Metrik auf $C[a,b]$

Für $f,g \in C[a,b]$ kann man durch

$$d(f,g) := \left(\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Metrik erklären.

Ist z.B. $f(x) = 5x$, $g(x) = 2x-1$, so lautet die Metrik auf $[0,1]$:

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 (3x+1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (9x^2+6x+1)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left[3x^3 + 3x^2 + x \right]_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}.$$