TEIL D: LINEARE ALGEBRA (FORTSETZUNG)

§41: EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

41.1 Motivation

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann das Skalarprodukt zweier Vektoren gebildet werden. Mit seiner Hilfe lassen sich Längen von Vektoren bestimmen sowie feststellen, ob Vektoren senkrecht zueinander sind; allgemein können damit auch Winkel zwischen Vektoren berechnet werden.

Ziel: Wir wollen dieses Konzept auf andere Vektorräume ausdehnen und auch in diesen ein Skalarprodukt, Orthogonalität, Längen- und Winkelbestimmung bereitstellen.

41.2 Def.:

Es seien $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Vektoren u und v heißen gleich, falls $u_i = v_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Die Summe von u und v ist definiert durch

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T$$

sowie das skalare Vielfache αv durch

$$\alpha v = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)^T$$

Bem.: a) Der Nullvektor im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$0 := (0, \dots, 0)^T$$

b) Das (additive) Inverse $-u$ eines Vektors u lautet

$$-u := (-u_1, \dots, -u_n)^T$$

c) Die Differenz zweier Vektoren u und v lautet

$$u - v := u + (-v) = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)^T$$

Mit der in Def. 41.2 eingeführten Addition und Skalarmultiplikation wird der $\mathbb{R}^n$ zum Vektorraum. Es gilt nämlich

41.3 Satz: (Vektorraumeigenschaften des $\mathbb{R}^n$)

Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe

- i) Kommutativgesetz: $u+v = v+u$
- ii) Assoziativgesetz: $(u+v)+w = u+(v+w)$
- iii) Neutrales Element: $u+0 = 0+u = u$
- iv) Inverses Element: $u+(-u) = 0$

b) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

c) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

d) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

e) $1v = v$

Beweis: Einfaches Anwenden von Def. 41.2

41.4 Def.: Es seien $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ und $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Das euklidische Produkt $u \cdot v$ wird definiert durch

$$u \cdot v := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

41.5 Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u \cdot v = (-1)\cdot 5 + 3\cdot(-4) + 5\cdot 7 + 7\cdot 0 = 18.$$

Bemerkung: Den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem euklidischen Produkt (Skalarprodukt) bezeichnet man als n-dimensionalen euklidischen Raum.

41.6 Satz: (Eigenschaften des euklidischen Produkts)

Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

c) $(\alpha u) \cdot v = \alpha (u \cdot v)$

d) $v \cdot v \geqq 0$

$v \cdot v = 0 \iff v = 0.$

Beweis: Wir zeigen nur (b) und (d).

b)
$$\begin{aligned}(u+v) \cdot w &= (u_1+v_1, \dots, u_n+v_n)^T \cdot (w_1, \dots, w_n)^T \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i+v_i) w_i = \sum_{i=1}^n u_i w_i + \sum_{i=1}^n v_i w_i \\ &= u \cdot w + v \cdot w\end{aligned}$$

d)
$$v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geqq 0$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$, d.h. wenn $v = 0$.

41.7 Def.: Die euklidische Norm eines Vektors $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|u| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

Der euklidische Abstand zweier Vektoren $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ und $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ist definiert durch

$$d(u,v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

41.8 Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|u| = \sqrt{1 + 9 + 4 + 49} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}d(u,v) &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 16 + 16 + 25} = \sqrt{58}\end{aligned}$$

41.9 Satz: (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung im $\mathbb{R}^n$)

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$

Beweis: in der nächsten Vorlesung (in allgemeinerer Form)

41.10 Satz: (Eigenschaften der euklidischen Norm)

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $|u| \geq 0$

b) $|u| = 0 \iff u = 0$

c) $|\alpha u| = |\alpha||u|$

d) $|u+v| \leq |u| + |v|$ (Dreiecksungleichung)

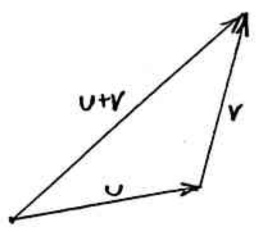
Beweis: Wir zeigen nur (c) und (d).

c) $$|\alpha u| = \sqrt{(\alpha u_1)^2 + \ldots + (\alpha u_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 (u_1^2 + \ldots + u_n^2)}$$
$$= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} = |\alpha||u|$$

d) $$
\begin{aligned}
|u+v|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) && \text{(Def.)} \\
&= u^2 + u \cdot v + v \cdot u + v^2 && \text{(41.6 b)} \\
&= |u|^2 + 2 u \cdot v + |v|^2 \\
&\leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 && \text{(41.9 Cauchy-Schwarz)} \\
&= (|u| + |v|)^2
\end{aligned}
$$
$\Rightarrow |u+v| \leq |u| + |v|$ □

Bedeutung der Dreiecksungleichung:

Die Länge zweier Dreiecksseiten ist nie kleiner als die der dritten:



41.11. Satz: (Eigenschaften des euklidischen Abstands)

Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

a) $d(u,v) \geq 0$

b) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

c) $d(u,v) = d(v,u)$

d) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Beweis: Alle Eigenschaften ergeben sich als direkte Folgerungen aus Satz 41.10.

41.12 Def.: Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls $u \cdot v = 0$.

Beispiel:

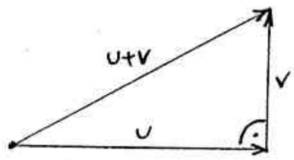
$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u \cdot v = -2 + 6 + 0 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ u und v sind orthogonal.

Für orthogonale Vektoren folgt aus der Dreiecksungleichung

41.13 Satz: (Satz von Pythagoras im $\mathbb{R}^n$)

Sind $u, v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so gilt $\qquad |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$



Hypotenusenquadrat
= Summe der Kathetenquadrate.

Beweis: $|u+v|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = |u|^2 + 2\underbrace{u \cdot v}_{=0 \text{ (Orthogonalität)}} + |v|^2$ $\square$

Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sind orthogonal.}$$

$$|u|^2 = 4 + 9 + 1 + 16 = 30$$

$$|v|^2 = 1 + 4 + 0 + 1 = 6$$

$$u + v = (-1, 5, 1, 3)^T$$

$$|u+v|^2 = 1 + 25 + 1 + 9 = 36 = |u|^2 + |v|^2.$$

41.14 Interpretation des euklidischen Produktes als Matrixmultiplikation

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Dann kann man das euklidische Produkt als Multiplikation der $1 \times n$-Matrix u^T mit der $n \times 1$-Matrix v auffassen:

$$u \cdot v = u^T v$$

Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$u^T v = (1, -3, 7, 4) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 7 + 36 = 37.$$

Beachte: Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind für uns stets Spaltenvektoren.