

TEIL D: LINEARE ALGEBRA

§41: Euklidische Vektorräume

- 41.1 Motivation
- 41.2 Definition Gleichheit von Vektoren/ additives Inverse/ Differenz/ Nullvektor
- 41.3 Satz – Vektorraumeigenschaften des \mathbb{R}^n
- 41.4 Definition Euklidisches Produkt
- 41.5 Beispiel/ Bemerkung Euklidischer Raum
- 41.6 Satz – Eigenschaften d. euklidischen Produkts + Beweis
- 41.7 Definition Euklidischer Abstand
- 41.8 Beispiel
- 41.9 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung im \mathbb{R}^n
- 41.10 Satz – Eigenschaften d. euklidischen Norm + Beweis
- 41.11 Eigenschaften des Euklidischen Abstands
- 41.12 Definition Orthogonal
- 41.13 Satz – Satz d. Pythagoras im \mathbb{R}^n + Beweis
- 41.14 Interpretation d. euklidischen Produkt als Matrixmultiplikation

§42: Funktionalanalytische Verallgemeinerungen

- 42.1 Motivation
- 42.2 Definition Prä-Hilbert-Raum
- 42.3 Beispiele Euklidische Räume/ Gewichtete euklidische Räume/ Polynomräume/ Funktionenraum
- 42.4 Definition Norm/ normierter Raum/ Banachraum
- 42.5 Satz – Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung in Prä – Hilbert – Räumen
- 42.6 Satz – Induzierte Norm v. Prä-Hilbert-Räumen
- 42.7 Beispiele Norm einer stetigen Funktion, gewichtete euklidische Norm
- 42.8 Definition Metrik/ metrischer Raum
- 42.9 Satz – Induzierte Metrik eines normierten Raums
- 42.10 Beispiel Metrik

§43: Orthogonalität

- 43.1 Motivation
- 43.2 Definition Winkel, Orthogonal
- 43.3 Beispiele
- 43.4 Satz – Satz d. Pythagoras in Prä – Hilbert – Räumen (Verallgemeinerung v. 41.13)
- 43.5 Beispiel
- 43.6 Definition orthogonale Menge/ orthonormal/ Orthogonalbasis/ Orthonormalbasis
- 43.7 Beispiel
- 43.8 Satz – Koordinatendarstellung in Orthonormalbasis
- 43.9 Beispiel Orthonormalbasis
- 43.10 Satz – Koordinatendarstellung in Orthogonalbasis
- 43.11 Satz – Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Mengen
- 43.12 Beispiel
- 43.13 Orthogonalisierungsalgorithmus von Gram & Schmidt
- 43.14 Satz – Existenz einer Orthogonalbasis
- 43.15 Beispiel
- 43.16 Satz – Orthogonale Projektion auf Unterräume
- 43.17 Definition Orthogonales Komplement
- 43.18 Projektionssatz
- 43.19 Satz – Approximation
- 43.20 Beispiel

§44: Fourierreihen

- 44.1 Motivation
- 44.2 Herleitung der Fourierkoeffizienten + Definition
Approximation im quadratischen Mittel
- 44.3 Beispiel
- 44.4 Definition Fourierreihe/ Gibbs – Phänomen
- 44.5 Praktische Bedeutung

44.6 Aktuelle Weiterentwicklung Wavelets

§45: Orthogonale Matrizen

- 45.1 Motivation
- 45.2 Definition Orthogonale Matrix
- 45.3 Satz – Eigenschaften orthogonaler Matrizen
- 45.4 Beispiele Rotationen/ Spiegelung
- 45.5 Satz – Determinante orthogonaler Matrizen
- 45.6 Definition $SO(n)$
- 45.7 Satz – Gruppeneigenschaft v. $O(n)$ und $SO(n)$
Definition orthogonale Gruppe $O(n)$ und Spez. Orthogonale Gruppe $O(n)$
- 45.8 Wechsel zwischen Orthonormalbasen

§46: Eigenwerte & Eigenvektoren

- 46.1 Motivation
- 46.2 Definition Eigenvektor/ Eigenwert
- 46.3 Bedeutung von Eigenvektoren und Eigenwerten
- 46.4 Beispiele
- 46.5 Bestimmung von Eigenwerten
- 46.6 Beispiel
- 46.7 Bemerkungen
- 46.8 Definition Dreiecksmatrix (obere-/ untere-)
- 46.9 Beispiele
- 46.10 Satz – Eigenwerte v. Dreiecksmatrizen
- 46.11 Beispiel
- 46.12 Bestimmung der Eigenvektoren
- 46.13 Beispiel
- 46.14 Satz – Eigenwerte von Potenzen einer Matrix
- 46.15 Beispiel

§47: Eigenwerte & Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

- 47.1 Motivation
- 47.2 Satz – Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen
- 47.3 Beispiel
- 47.4 Satz – Hauptachsentransformation und Spektraldarstellung
- 47.5 Bemerkungen
- 47.6 Beispiel

§48: Quadratische Formen und positiv definite Matrizen

- 48.1 Motivation
- 48.2 Definition Quadratische Form/ quadratisches Polynom/ Quadrik
- 48.3 Beispiele
- 48.4 Definition Definit/ Semidefinit/ Indefinit
- 48.5 Satz – Positiv definite Matrizen & quadratische Formen
- 48.6 Satz – Hauptminorenkriterium
- 48.7 Beispiel
- 48.8 Wurzel einer positiv semidefiniten Matrix
- 48.9 Definition Rayleigh Quotient
- 48.10 Satz – Rayleigh Prinzip

§49: Quadriken

- 49.1 Motivation
- 49.2 Grundlegende Verfahrensweisen (Elimination -> Normalform)
- 49.3 Beispiel Quadrik in Normalform umwandeln
- 49.4 Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2
- 49.5 Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^3
- 49.6 Satz
- 49.7 Beispiele für Quadriken im \mathbb{R}^3

§50: Matrixnormen und Eigenwertabschätzungen

- 50.1 Motivation
- 50.2 Definition Matrixnorm/ Submultiplikativität
- 50.3 Beispiele
- 50.4 Definition Kompatibilität
- 50.5 Beispiele
- 50.6 Definition Zugeordnete Matrixnorm
- 50.7 Beispiele Vektornorm – Matrixnorm – Zuordnung
- 50.8 Satz – Abschätzung von Eigenwerten mittels Matrixnormen
- 50.9 Beispiel
- 50.10 Satz – Satz von Gerschgorin
- 50.11 Beispiel
- 50.12 Korollar – Invertierbarkeit strikt diagonaldominanter Matrizen

§51: Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- 51.1 Motivation
- 51.2 Die einfach Vektoriteration
Rayleigh – Koeffizient/ Potenzmethode/ Von – Mises – Verfahren
- 51.3 Beispiel
- 51.4 Das Jacobi – Verfahren

TEILE: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

§52: Partielle Ableitungen

- 52.1 Motivation
- 52.2 Definition Partiiell differenzierbar/ partielle Ableitung/ Stetigkeitsbegriffe
- 52.3 Beispiele
- 52.4 Satz – Differentiationsregeln
- 52.5 Definition – Gradient/ Nabla – Operator
- 52.6 Bemerkungen
- 52.7 Anwendungsbeispiel
- 52.8 Definition Partielle Ableitungen zweiter Ordnung (~ k-ter Ordnung)
 C^k Funktion
- 52.9 Satz – Vertauschbarkeitssatz von Schwarz
- 52.10 Beispiel
- 52.11 Definition Hesse – Matrix/ Spur
- 52.12 Definition Laplace – Operator
- 52.13 Anwendung: Partielle Differentialgleichungen + Beispiele
- 52.14 Definition Richtungsableitung (Gateaux – Ableitung)
- 52.15 Bemerkungen
- 52.16 Satz – Darstellung der Richtungsableitung durch den Gradienten
- 52.17 Beispiel
- 52.18 Bemerkungen

§53: Ableitungsoperatoren für vektorwertige Funktionen

- 53.1 Motivation
- 53.2 Definition Partiiell differenzierbar
- 53.3 Bemerkung
- 53.4 Definition Jacobi – Matrix (Funktionalmatrix)
- 53.5 Bemerkungen
- 53.6 Beispiel
- 53.7 Definition Vektorfeld (C^k – Vektorfeld)
- 53.8 Definition Divergenz
- 53.9 Satz – Rechenregel für die Divergenz
- 53.10 Bemerkungen
- 53.11 Definition Rotation
- 53.12 Bemerkungen (Kreuzprodukt)
- 53.13 Beispiel
- 53.14 Satz – Rechenregeln für die Rotation

§54: Totale Differenzierbarkeit

- 54.1 Motivation
- 54.2 Definition Total (vollständig) differenzierbar
- 54.3 Satz – Partielle und totale Differenzierbarkeit
- 54.4 Satz – Differentiationsregeln
- 54.5 Bemerkung

§55: Der Mittelwertsatz & Der Satz von Taylor

- 55.1 Motivation
- 55.2 Satz – 1. Mittelwertsatz
- 55.3 Bemerkung
- 55.4 Beispiel

§56: Numerische Differentiation

- 56.1 Motivation
- 56.2 Problembeschreibung (zunächst für Funktionen einer Variablen)
- 56.3 Beispiel
- 56.4 Anmerkungen
- 56.5 Anwendung auf die Diskretisierung von Differentialgleichungen

§57: Extrema von Funktionen mehrerer Variabler

- 57.1 Motivation
- 57.2 Definition (strikt) lokales Minimum/Maximum
- 57.3 Satz – Notwendige Bedingung für lokale Extrema
- 57.4 Bemerkungen (Sattelpunkt, Stationärer Punkt)
- 57.5 Satz – Klassifizierung stationärer Punkte
- 57.6 Bemerkung (Implikation der Extrema)
- 57.7 Beispiel

§58: Extrema mit Nebenbedingungen

- 58.1 Motivation
- 58.2 Beispiel Verpackungsoptimierung im \mathbb{R}^2
- 58.3 Allgemeine Vorgehensweise
- 58.4 Bemerkung
- 58.5 Beispiel Extremabestimmung einer quadratischen Form mit Nebenbedingung
- 58.6 Beispiel Bestimmung Notwendige Bedingung

§59: Variationsrechnung

- 59.1 Motivation
- 59.2 Ein diskretes Beispiel
- 59.3 Satz – Euler – Lagrange – Gleichung
- 59.4 Erweiterungen von Satz 59.3 (Deluxe – Variante)
- 59.5 Beispiel

§60: Umkehrfunktionen und die Transformationsregel

- 60.1 Motivation
- 60.2 Erinnerung: Umkehrbarkeit von Funktionen einer Variablen
- 60.3 Satz – Umkehrsatz
- 60.4 Bemerkungen
- 60.5 Beispiel Polarkoordinaten
- 60.6 Erinnerung Substitutionsregel
- 60.7 Transformationsregel
- 60.8 Beispiel Integration in Kugelkoordinaten

TEIL F: STOCHASTIK

§61: Grundbegriffe

- 61.1 Motivation
- 61.2 Gebietsbegrenzung
- 61.3 Definition Wahrscheinlichkeit
- 61.4 Definition Laplace – Experiment
- 61.5 Mengentheoretische Wahrscheinlichkeitsbeschreibung/ Definitionen

§62: Kombinatorik

- 62.1 Motivation
- 62.2 2 Grundlegende Sprechweisen
Urnenmodell/ Schubladenmodell
- 62.3 Produktregel der Kombinatorik
- 62.4 Die vier kombinatorischen Grundsituationen
Geordnete/ Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung + Beispiele
Geordnete/ Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung + Beispiele
Stirling – Formel

§63: Erzeugende Funktionen

- 63.1 Motivation
- 63.2 Permutationen & Kombinationen
- 63.3 Beispiel einer erzeugenden Funktion
- 63.4 Definition Erzeugende Funktion
- 63.5 Beispiel Schubladenmodell (ohne Wiederholung und maximal einfache Besetzung)
- 63.6 Beispiel Schubladenmodell (mit Wiederholung und maximal zweifache Besetzung)
- 63.7 Beispiel Mögliche Kombinationen einer 4-elementigen Menge mit Beschränkungen
- 63.8 Satz – Kombinationen mit vorgegebenen Wiederholungen
- 63.9 Satz – Kombinationen mit beliebigen Wiederholungen
- 63.10 Bemerkungen
- 63.11 Definition Experimentell erzeugende Funktion
- 63.12 Bedeutung für Permutationen
- 63.13 Satz – Permutationen mit vorgegebenen Wiederholungen
- 63.14 Satz – Permutationen mit beliebigen Wiederholungen

§64: Bedingte Wahrscheinlichkeit

- 64.1 Motivation
- 64.2 Beispiel + Definition Bedingte Wahrscheinlichkeit/ Unabhängig
- 64.3 Verallgemeinerung
- 64.4 Beispiel Würfel – Wahrscheinlichkeit
- 64.5 Beispiel Krebstest
- 64.6 Satz – Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- 64.7 Beispiel
- 64.8 Satz – Satz von Bayes
- 64.9 Anwendungsbeispiele

§65: Zufallsvariable, Erwartungswert, Varianz

- 65.1 Motivation
- 65.2 Definition Zufallsvariable
- 65.3 Beispiel
- 65.4 Definition Verteilung
- 65.5 Beispiel Histogramm
- 65.6 Definition Erwartungswert
- 65.7 Beispiel Erwartungswert
- 65.8 Satz – Linearität des Erwartungswerts
- 65.9 Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen
- 65.10 Beispiele zur Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen
- 65.11 Definition Varianz / Standardabweichung (Streuung)
- 65.12 Berechnung der Varianz/ Schiebungsatz
- 65.13 Beispiel Varianz/ Standardabweichung

- 65.14 Satz – Eigenschaften der Varianz
- 65.15 Standardisierte Zufallsvariablen
- 65.16 Ungleichung von Jensen
- 65.17 Beispiele
- 65.18 Gleichung von Wald[^]
Satz – Gleichung von Wald
- 65.19 Beispiel
- 65.20 Definition Kovarianz/ Korrelationskoeffizient/ Unkorreliert
- 65.21 Bemerkungen
- 65.22 Satz – Rechenregeln für die Korrelation
- 65.23 Bemerkungen
- 65.24 Zuverlässigkeitsanalyse bei Systemen (Reihen-, Parallel-, Gemischte Systeme)

§66: Abschätzungen für Abweichungen vom Erwartungswert

- 66.1 Motivation
- 66.2 Definition k-te Moment/ k-te zentrale Moment
- 66.3 Bemerkungen
- 66.4 Definition Momenten erzeugende Funktion
- 66.5 Satz – Eigenschaften Momenten erzeugender Funktionen
- 66.6 Satz – Markow'sche Ungleichung
- 66.7 Folgerungen + Bemerkung
Einfache Markow – Ungleichung
Tschebyschew – Ungleichung
Chernoff – Schranke
- 66.8 Beispiel
- 66.9 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

§67: Wichtige diskrete Verteilungen

- 67.1 Motivation
- 67.2 Die Gleichverteilung
- 67.3 Beispiel
- 67.4 Die Binomialverteilung (Bernoulli – Experiment)
- 67.5 Beispiel Zufallsabhängigkeit sportlicher Resultate
- 67.6 Die Poissonverteilung
- 67.7 Reales Beispiel: Der große Jubiläumstag
- 67.8 Die geometrische Verteilung
- 67.9 Beispiel

§68: Wichtige kontinuierliche Verteilungen

- 68.1 Motivation
- 68.2 Definition Dichte
- 68.3 Veranschaulichung
- 68.4 Definition Verteilungsfunktion
- 68.5 Beispiel Kontinuierliche Gleichverteilung
- 68.6 Die Standardnormalverteilung
Normale Dichte
- 68.7 Die allgemeine Normalverteilung (Gauß – Verteilung)
- 68.8 Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußverteilung
- 68.9 Beispiel
- 68.10 Satz – Zentraler Grenzwertsatz
- 68.11 Bemerkungen

§69: Multivariate Verteilungen und Summen von Zufallsvariablen

- 69.1 Motivation
- 69.2 Wichtige Definitionen Gemeinsame Dichte/ Erwartungswertvektor/ Kovarianzmatrix
Multivariate Normalverteilung
- 69.3 Beispiel
- 69.4 Satz – Gemeinsame Dichte von unabhängigen Zufallsvariablen
- 69.5 Beispiel

- 69.6 Definition Faltung
- 69.7 Satz – Summe unabhängiger kontinuierlicher Zufallsvariabler
- 69.8 Satz – Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariabler
- 69.9 Definition Diskrete Faltung
- 69.10 Satz – Summe unabhängiger diskreter Zufallsvariabler
- 69.11 Satz – Summe unabhängiger Poisson – verteilter Zufallsvariabler

§70: Parameterschätzungen und Konfidenzintervalle

- 70.1 Motivation
- 70.2 Definition Stichprobe vom Umfang n / Stichprobenwerte
- 70.3 Beispiel Kiste mit teilweise fehlerhaften Schrauben
- 70.4 Definition Mittelwert (arithmetisches Mittel)/ Varianz/ Standardabweichung
- 70.5 Bemerkungen
- 70.6 Beispiel Wahlumfrage
- 70.7 Konfidenzintervalle/ Konfidenzniveau
- 70.8 Beispiel Wahlumfrage aus 70.6
- 70.9 Beispiel Überbuchung eines Flugzeuges

§71: Hypthesentests

- 71.1 Motivation
- 71.2 Parametertest am Beispiel eines Münzexperimentes
- 71.3 Bemerkungen (Nullhypothese, Gegenhypothese)
- 71.4 Der Chi – Quadrat – Test
Definition Freiheitsgrade
- 71.5 Beispiel
- 71.6 Bemerkung

§72: Methode der kleinsten Quadrate

- 72.1 Problemstellung
- 72.2 Methode der kleinsten Quadrate
Definition Quadratischer Fehler/ Ausgleichskurve (Regressionskurve)
- 72.3 Minimierung des quadratischen Fehlers
Definition Normalengleichung/ Pseudoinverse (Moore – Penrose – Inverse)
- 72.4 Bemerkungen
- 72.5 Satz – Pseudolösung überbestimmter Gleichungssysteme
- 72.6 Bemerkung
- 72.7 Beispiel Bestimmung einer Regressionsgerade

§73: Robuste Statistik

- 73.1 Motivation
- 73.2 Median
- 73.3 Bemerkung
- 73.4 Empirischer Median
- 73.5 Beispiele
- 73.6 M- Schätzer
Definition Straffunktion
- 73.7 Beispiele
Definition Modalwerte / Midrange / Lorentz – Straffunktion

§74: Fehlerfortpflanzung

- 74.1 Motivation
- 74.2 Satz – Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß
- 74.3 Beispiel Widerstand

§75: Markowketten

- 75.1 Motivation
- 75.2 Definition Stochastischer Prozess / Markowkette
- 75.3 Beispiel
Definition Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten (Übergangsmatrix)

- 75.4 Definition Homogen (Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten)
- 75.5 Bemerkungen
 - Definition Stochastische Matrix
- 75.6 Zustandsbeschreibung endlicher homogener Markowketten
 - Definition Transient / Rekurrent / Periodisch / Absorbierend
- 75.7 Satz – Eigenwerte stochastischer Matrizen + Beweis
- 75.8 Bedeutung des Eigenwerts $\lambda = 1$
- 75.9 Satz – Potenzen stochastischer Matrizen + Beweis
- 75.10 Gegenbeispiel
- 75.11 Markowketten im Gleichgewicht
- 75.12 Beispiel
 - Definition Transitiv (irreduzibel)
- 75.13 Praktisches Kriterium für Transitivität
- 75.14 Beispiele

§76: Verborgene Markowmodelle

- 76.1 Motivation
- 76.2 Beispiel Spieler mit fairer und unfairer Münze
- 76.3 Schwierigeres Beispiel
- 76.4 Definition Verborgenes Markowmodell
- 76.5 Beispiel
- 76.6 Problemstellung Dekodierung
- 76.7 Der Viterbi - Algorithmus