

10. Übung zur Mathematik für Informatiker I

Anmerkung: *Bei allen Aufgaben muss der Rechenweg klar erkennbar sein !
Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen*

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion f durch. Bestimmen Sie dazu alle Nullstellen von f , alle Polstellen und deren Typ, das Monotonieverhalten, alle Extremstellen und ihre Art sowie Wendepunkte.

Achten Sie auf die korrekte Anwendung notwendiger und hinreichender Kriterien.

Aufgabe 2: (2+2+1 Punkte)

Versuchen Sie näherungsweise die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ im Intervall $[1, 2]$ zu bestimmen, indem Sie jeweils 5 Fixpunktkiterationen basierend auf

a) $x = \Phi_a(x) := x - x^3 - 4x^2 + 10$ und

b) $x = \Phi_b(x) := \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

mit Startwert $x_0 = 1,5$ durchführen.

Zeigen Sie allgemein, dass die Fixpunkte von Φ_a und Φ_b Nullstellen von f sind.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\Phi(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin(x/2)$ einen Fixpunkt x^* im Intervall $[0, 2\pi]$ hat. Führen Sie 3 Fixpunkt-Iterationen mit Startwert $x_0 = \pi$ durch, um eine Approximation an den Fixpunkt zu erhalten. Wie gross ist der absolute Fehler dieser Näherung?

Ermitteln Sie die Anzahl n dieser Iterationen (ohne die Iterationen auszuführen), die mindestens nötig sind, um x^* mit einem absoluten Fehler kleiner oder gleich 10^{-4} zu berechnen.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Führen Sie 5 Iterationen des Newton-Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1.5$ aus, um die Nullstelle der Gleichung $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ im Intervall $[1, 2]$ zu bestimmen.

Abgabetermin: Freitag, 16. 01. 2004 **vor** der Vorlesung