

7. Übung zur Mathematik für Informatiker I

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Jäger Waldmeister ist noch 100 Meter von seiner Jagdhütte entfernt, als sein Dackel Waldi auf der Türschwelle sitzend ihn bemerkt. Er springt auf und läuft seinem Herrchen mit einer konstanten Geschwindigkeit von $5\frac{m}{s}$ entgegen, der seinerseits der Hütte mit steten $2\frac{m}{s}$ zustrebt. Als der Waldi sein Herrchen erreicht, macht er sofort kehrt und läuft zurück zur Tür, wo er sich wieder umwendet und seinem Herren zu eilt. Bis Jäger Waldmeister die Hütte erreicht hat, pendelt Waldi auf diese Weise unablässig zwischen Herrchen und Tür hin und her.

Berechnen Sie die gesamte Wegstrecke, die Waldi auf diese Weise zurückgelegt hat.

Aufgabe 2: (2+1+3 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die durch $f(s, t) = 2^{s-1} \cdot (2t - 1)$ definierte Abbildung f eine Bijektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf \mathbb{N} ist.
- b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Grenzwertes für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ aus der Vorlesung den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

(Hierfür benötigen Sie das Resultat aus Teilaufgabe (a) nicht notwendig.)

- c) Berechnen Sie den folgenden Quotienten von Reihengrenzwerten:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}} = \frac{\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots}{\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (a), um die Reihe im Nenner als Produkt derjenigen im Zähler und einer weiteren Reihe auszudrücken.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Ein bestimmtes Computerprogramm liest eine Binärdatei als Eingabe und erzeugt eine Binärdatei als Ausgabe. Die Ausgabedatei ist stets um 20 Prozent kürzer als die Eingabedatei.

Das Programm wird nun beliebig oft ausgeführt, wobei jedesmal die Ausgabedatei des k -ten Programmlaufs als Eingabedatei für den $k + 1$ -ten verwendet wird.

Angenommen, die Eingabedatei des allerersten Programmlaufs hat eine Länge von 300 Kilobyte und soll zusammen mit den Ausgabedateien aller Programmläufe gespeichert werden.

Reicht dafür eine Diskette mit der Speicherkapazität 1456 Kilobyte aus?

Bei der Lösung soll nicht berücksichtigt werden, dass Dateien nur ganzzahlige Anzahlen von Bytes enthalten können, und es soll auch angenommen werden, dass eine Datei auf der Diskette nur exakt den ihrer Größe entsprechenden Speicherplatz verbraucht.

Aufgabe 4: (1+1+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad \text{und} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}.$$

c) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Reihe

$$1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

wobei λ keine ganze Zahl ist.

Aufgabe 5: (1+1+1+2 Punkte)

Stellen Sie die rationale Zahl $\frac{7654}{5}$ zur Basis a) $b = 2$, b) $b = 7$, und c) $b = 12$ dar.

d) Drücken Sie die Zahl $(0, \overline{100})$ im Zahlensystem zur Basis 12 aus.

Verwenden Sie bei c) und d) die Buchstaben A und B als zusätzliche Ziffern.

Abgabetermin: Freitag, 12. 12. 2003 **vor** der Vorlesung