

6. Übung zur Mathematik für Informatiker I

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung:

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|.$$

(Dies ist Aussage (e) des Satzes 13.14. Die Aussagen (a)–(d) des gleichen Satzes können Sie als bewiesen voraussetzen.)

Aufgabe 2: (1+1+2 Punkte)

Untersuchen Sie die unten stehenden Mengen auf die Existenz von \min , \max , \inf und \sup . Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Werte.

- a) $\left\{ \frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ b) $\left\{ x + \frac{1}{x} \mid \frac{1}{2} < x \leq 3 \right\}$
c) $\left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N} \right\}$

Aufgabe 3: (1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn man

a) $a_n := \frac{4n^2 - 2n + 1}{7n^3 + 3n - 2/n}$, b) $b_n := \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

- c) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, derart dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, aber $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ ist.

Aufgabe 4: (2+1+2 Punkte)

Es sei $b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < 1$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch

$$a_1 := \frac{1}{2}b, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(b + a_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

- a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
- b) Die Folge konvergiert.
- c) Berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Es sei der folgende Algorithmus zur Berechnung einer Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ f(n-1) \cdot n & \text{falls } n > 1 \text{ ungerade,} \\ f(n/2) \cdot 2 & \text{falls } n > 1 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Man bestimme die Ordnung dieses Algorithmus (wobei als Maß für die Laufzeit die Anzahl der Aufrufe von f gelten soll).

Abgabetermin: Freitag, 5. 12. 2003 **vor** der Vorlesung