Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2003/2004

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Bernhard Burgeth
Dr. Martin Welk

# 5. Übung zur Mathematik für Informatiker I

Anmerkung: *Bei allen Aufgaben muss der Rechenweg klar erkennbar sein !*

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Gegeben seien die Polynome $a(x)$, $b(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$\begin{aligned} a(x) &:= 28x^5 - 66x^4 + 60x^3 - 32x^2 + 29x + 5 \quad \text{und} \\ b(x) &:= 14x^3 - 33x^2 + 23x + 4. \end{aligned}$$

Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(a(x), b(x))$ der beiden Polynome.

**Aufgabe 2:** (2+2 Punkte)

Es bezeichne $GF(7)[x]$ den Polynomring über dem Galoisfeld $GF(7)$.
Stellen Sie die Polynome

a) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \in GF(7)[x]$ und

b) $9x^3 - 27x^2 + 28x - 10 \in \mathbb{C}[x]$

jeweils als Produkt irreduzibler Polynome über dem entsprechenden Körper dar.

**Aufgabe 3:** (1+1+2 Punkte)

Vereinfachen Sie soweit als möglich die Ausdrücke
a) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$ und b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^4$.
c) Bestimmen Sie die Quadratwurzeln von $z = -15 - 8i$.

**Aufgabe 4:** (1+3 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ seien die Verknüpfungen „+“ und „·“ definiert durch

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) \;:=\; (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)\,,$$

$$
\begin{aligned}
(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) := \; & (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \\
& a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\
& a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, \\
& a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\,.
\end{aligned}
$$

Praktischerweise schreibt man $a + ib + jc + kd$ anstelle von $(a, b, c, d)$ mit den imaginären Einheiten $i, j$ und $k$. Dies ermöglicht den Gebrauch der Rechenregeln für reelle Zahlen, wenn man spezielle Multiplikationsregeln für $i, j$ und $k$ beachtet.

a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für die Multiplikation der Elemente $i, j$ und $k$ auf.

Ist $q = a + ib + jc + kd$ ein Quaternion, dann nennt man

i) $\overline{q} = \overline{a + ib + jc + kd} := a - ib - jc - kd$ die zu $q$ konjugierte Quaternion und

ii) $|q| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ den Betrag von $q$.

Verwenden Sie für Ihre Rechnungen stets $a+ib+jc+kd$ als Schreibweise eines Quaternions.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Schiefkörper aber kein Körper ist.

*Bemerkung:* Die oben definierte Multiplikation wurde 1843 von Sir William Rowan Hamilton entdeckt. Heute finden Quaternionen in der Robotik und der Computergrafik Anwendung.

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Menge $B$ aller Abbildungen $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ mit den folgenden Verknüpfungen eine Boolesche Algebra ist:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x,y) &= \max\{f(x,y), g(x,y)\}, \\
(f \cdot g)(x,y) &= \min\{f(x,y), g(x,y)\}, \\
(\neg f)(x,y) &= 1, \text{ wenn } f(x,y) = 0, \\
(\neg f)(x,y) &= 0, \text{ wenn } f(x,y) = 1.
\end{aligned}
$$

Die beiden Einheiten bezüglich „+“und „·“sind definiert als $n(x,y) = 0$ und $e(x,y) = 1$.

**Abgabetermin:** Freitag, 28. 11. 2003 **vor** der Vorlesung