

### 3. Übung zur Mathematik für Informatiker I

#### Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

Es seien die folgenden Abbildungen für die Mengen  $A, B, C$  und  $D$  gegeben:  $f_s : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : B \rightarrow C$  und  $f_i : C \rightarrow D$ . Dann gilt:

- a) Falls  $f_s$  surjektiv ist, gilt die Implikation:

$$g \circ f_s = h \circ f_s \implies g = h.$$

- b) Falls  $f_i$  injektiv ist, gilt die Implikation:

$$f_i \circ g = f_i \circ h \implies g = h.$$

#### Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

Seit gar nicht zu langer Zeit gibt es in der Nähe von Hogwash ein mondänes Hotel mit einem Hotelmanager namens Dave Hobbit. Hobbit's Hotel hat abzählbar unendlich viele Zimmer, die alle(!) belegt sind. Da erscheint ein neuer Gast und verlangt ein Zimmer. Herr Hobbit ist ein sehr kluger Mann, er bittet den Gast aus Zimmer 1 in das Zimmer 2 zu ziehen, den Gast aus Zimmer 2 verlegt er in Zimmer 3 und so weiter. Damit ist Zimmer 1 frei und kann bezogen werden.

- a) Es kommt ein Bus an mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen. Herr Hobbit bringt auch diese in seinem Hotel unter. Wie macht er das?
- b) Als abzählbar unendlich viele Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen ankommen und nach Zimmern verlangen, gerät Herr Hobbit ins Schwitzen. Können Sie ihm helfen und erklären, wie er alle diese Leute (ohne Mehrfachbelegung) in seinem Hotel unterbringen kann?

*Anmerkung:* Über die Zimmerpreise liegen leider keine Informationen vor.

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier natürlicher Zahlen  $a$  und  $b$  ist die kleinste natürliche Zahl, die durch beide Zahlen teilbar ist.

Beweisen Sie: Für zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  gilt stets

$$a \cdot b = \text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b).$$

**Aufgabe 4:** (2+3 Punkte)

- a) Finden Sie die kleinsten natürlichen Zahlen, die zu  $19$ ,  $288$ ,  $19 \cdot 288$  und  $19^3 \cdot 288^2$  jeweils kongruent modulo  $5$  sind.
- b) Beweisen Sie: Unter den Zahlen  $101, 1101, 11101, \dots, \underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ Einsen}} 01, \dots$  gibt es keine, die das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.  
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Zahlen modulo  $8$ ).

**Abgabetermin:** Freitag, 14. 11. 2003 **vor** der Vorlesung