Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Wintersemester 2003/04

Prof. Dr. Joachim Weickert
Dr. Martin Welk
Dr. Bernhard Burgeth

Lösungen der Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker I

Lösung zu Aufgabe 1:

Die natürliche Zahl sei n und habe im Dezimalsystem die Zifferndarstellung $(a_m \dots a_0)_{10}$, es ist also

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1$$

mit $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ (vgl. Kapitel 18 der Vorlesung).

Mittels der modularen Arithmetik (Kapitel 6) schließen wir aus $10 \equiv 1 \bmod 3$, dass

$$\begin{aligned} n &\equiv a_m \cdot 1^m + a_{m-1} \cdot 1^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 \\ &\equiv a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

gilt. Der Ausdruck in der letzten Zeile ist gerade die Quersumme von n. Also lässt die Zahl n bei Division durch 3 stets denselben Rest wie ihre Quersumme; wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist (also den Rest 0 lässt), dann trifft dies auch für n zu. $\square$

Lösung zu Aufgabe 2:

Wir benutzen den euklidischen Algorithmus (Kapitel 6). Da wir im Ring der Polynome in einer Variablen arbeiten, sind die Divisionen mit Rest als Polynomdivisionen auszuführen (Kapitel 9).

Wir beginnen daher mit der Polynomdivision $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) : (x^3 - 1)$. *(Anmerkung: Da beide Polynome vom gleichen Grad sind, ist es gleichgültig, welches Polynom wir zuerst als Divisor nehmen – beginnt man also umgekehrt mit* $(x^3 - 1) : (x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$, *gelangt man ebenso zur richtigen Lösung!)*

$$\begin{array}{l} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) \;:\; (x^3 - 1) \;= 1, \quad \text{Rest } -3x^2 + 5x - 2 \\ \underline{-(x^3 \qquad\qquad\quad - 1)} \\ \qquad -3x^2 + 5x - 2 \end{array}$$

Damit wissen wir, dass

$$\mathrm{ggT}(x^3 - 3x^2 + 5x - 3, x^3 - 1) = \mathrm{ggT}(x^3 - 1, -3x^2 + 5x - 2)$$

gilt, und fahren fort mit der Polynomdivision

$$\begin{array}{rl}
(x^3 \qquad\qquad\qquad - 1) & : \ (-3x^2 + 5x - 2) \ = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{9}, \quad \text{Rest } \frac{19}{9}x - \frac{19}{9} \\
\underline{-(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x)} & \\
(\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1) & \\
\underline{-(\frac{5}{3}x^2 - \frac{25}{9}x + \frac{10}{9})} & \\
\frac{19}{9}x - \frac{19}{9} &
\end{array}$$

Damit haben wir

$$\mathrm{ggT}(x^3 - 3x^2 + 5x - 3, x^3 - 1) = \mathrm{ggT}(-3x^2 + 5x - 2, \tfrac{19}{9}x - \tfrac{19}{9}) \ .$$

Da es für die Teilbarkeit von Polynomen über $\mathbb{R}$ auf (von 0 verschiedene) konstante reelle Faktoren nicht ankommt, dürfen wir das zweite Polynom mit $\frac{9}{19}$ multiplizieren und erhalten

$$\mathrm{ggT}(x^3 - 3x^2 + 5x - 3, x^3 - 1) = \mathrm{ggT}(-3x^2 + 5x - 2, x - 1) \ .$$

(Anmerkung: Diese Umformung dient nur der Vereinfachung. Verwendet man weiterhin das Polynom $\frac{19}{9}x - \frac{19}{9}$, so geht alles Weitere ebenso, nur dass man Brüche als Koeffizienten erhält.)

Da die nächste Polynomdivision

$$\begin{array}{rl}
(-3x^2 + 5x - 2) & : \ (x - 1) \ = -3x + 2 \\
\underline{-(-3x^2 + 3x)} & \\
(2x - 2) & \\
\underline{-(2x - 2)} & \\
0 &
\end{array}$$

ohne Rest aufgeht, ist $x - 1$ Teiler von $-3x^2 + 5x - 2$ und damit

$$\mathrm{ggT}(x^3 - 3x^2 + 5x - 3, x^3 - 1) = x - 1 \ .$$

(Anmerkung: Wenn man mit $\frac{19}{9}x - \frac{19}{9}$ arbeitet, so findet man dieses Polynom auch als ggT. Das ist ein ebenso korrektes Resultat.)

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Um die Verknüpfungstafel der Multiplikation in R zu vervollständigen, benutzen wir die Distributivgesetze $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

- Da lt. Verknüpfungstafel gilt $d = b+c$, folgt $d \cdot d = d \cdot (b+c) = d \cdot b + d \cdot c$ und mit $d \cdot b = b$, $d \cdot c = c$ schließlich $d \cdot d = d$.
- Wenden wir $d = b + c$ im ersten statt zweiten Faktor von $d \cdot d$ an, so folgt analog $d \cdot d = (b+c) \cdot d = b \cdot d + c \cdot d = b \cdot d + a$. Zwar ist $b \cdot d$ noch nicht bekannt, doch kennen wir bereits $d \cdot d = d$ und sehen daher durch Einsetzen, dass $d = b \cdot d + a$ gilt, also $b \cdot d = d - a$. Aus der Additionstafel ist ersichtlich, dass $d - a = d$ gilt (denn d ist das (einzige) Element, das zu a addiert d ergibt). Somit haben wir $b \cdot d = d$.
- Wegen $c = b + d$ ist $b \cdot c = b \cdot b + b \cdot d = b + d = c$.
- Wiederum aus $c = b + d$ folgt $c \cdot b = b \cdot b + d \cdot b = b + b = a$.
- Schließlich folgt aus $c = b + d$ noch $c \cdot c = c \cdot b + c \cdot d = a + a = a$.

Die vervollständigte Tafel lautet also

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
c	a	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	a
d	a	b	c	$\boldsymbol{d}$

b) Die Verknüpfungstafel der Multiplikation ist nicht symmetrisch zur Diagonalen, z. B. ist (wie sogar schon ohne die Vervollständigung aus Teilaufg. a) ersichtlich ist) $d \cdot c = c \neq a = c \cdot d$. Damit ist der Ring R ***nicht*** kommutativ.

c) Setzt man $e = b$, so gilt für alle $x \in R$ die Gleichheit $e \cdot x = x$. Das Gleiche trifft zu, wenn man $e = d$ setzt.

Da allerdings lt. Teilaufg. b) R bezüglich der Multiplikation eine nicht kommutative Halbgruppe ist, müsste für ein Einselement e zusätzlich gelten, dass für alle $x \in R$ auch $x \cdot e = x$ gilt. Das ist weder für b noch für d der Fall – wie man ebenfalls sehen kann, ohne Teilaufg. a) gelöst zu haben, denn es ist $d \cdot b = b$ (wäre b Einselement, so müsste das gleich d sein) und $c \cdot d = a$ (wäre d Einselement, so müsste dies c sein).

Damit ist R ***kein*** Ring mit Eins.

Anmerkung: In der Vorlesung, Def. 8.2, ist nur die erste Eigenschaft eines Einselementes/neutralen Elementes erwähnt. Für Gruppen (auch solche, die nicht kommutativ sind) ist das tatsächlich ausreichend, weil die zweite Eigenschaft dann automatisch folgt. Wie das Beispiel dieser Aufgabe zeigt, ist das bei Halbgruppen anders. In der Bemerkung zu Def. 8.2 kommt das nicht ganz klar zum Ausdruck, deswegen wird diese Feinheit auch in der Klausur keine Rolle spielen, versprochen!

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Durch Ausmultiplizieren überzeugt man sich leicht davon, dass gilt

$$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right) = n+\sqrt{n}-n = \sqrt{n}\,.$$

Da der zweite Faktor für $n \in \mathbb{N}$ stets positiv ist, kann dividiert und dann gekürzt werden, sodass wir erhalten

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}\,.$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks kann nunmehr mittels der Grenzwertsätze bestimmt werden. Es gelten nämlich unter der Voraussetzung, dass alle Grenzwerte existieren, die Gleichheiten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)+1} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}\end{aligned}$$

und, da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ existiert und gleich 0 ist,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Wir unterscheiden drei Fälle in Abhängigkeit von x.

- *Fall 1:* $0 < x < 1$. Dann erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}x^n - 1}{\frac{1}{n}x^n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} x^n - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim\limits_{n\to\infty} x^n + 1} = \frac{0 \cdot 0 - 1}{0 \cdot 0 + 1} = -1.$$

- *Fall 2:* $x = 1$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

- Fall 3: $x > 1$. In diesem Fall bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{n}{x^n}}{1 + \frac{n}{x^n}} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x^n}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x^n}} = \frac{1-0}{1+0} = +1.$$

  Dass der Quotient $\frac{n}{x^n}$ für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, kann beispielsweise wie folgt über das Majorantenkriterium nachgewiesen werden: Zu jedem $x > 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x > 1 + \frac{1}{n_0}$. Dann ist $y := \frac{x}{1+1/n_0} > 1$. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, dass $\frac{(n+1)/x^{n+1}}{n/x^n} = \frac{1+1/n}{x} < \frac{1+1/n_0}{x} = \frac{1}{y}$. Damit wird die untersuchte Folge durch eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q := 1/y$ majorisiert und geht daher gegen 0.

c) Wir bezeichnen wie üblich die Glieder der Reihe mit a_n, also

$$a_n := \frac{x^n}{x^{2n} + 1} .$$

Um das Quotientenkriterium anwenden zu können, formen wir zunächst um

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^{2n+2} + 1} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x^n} = \frac{x^{2n+1} + x}{x^{2n+2} + 1}.$$

Wir unterscheiden vier Fälle.

- *Fall 1:* $|x| < 1$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n+2} + 1} \right)$$
$$= x \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+2} + 1} = x \cdot \frac{0+1}{0+1} = x.$$

  Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe damit absolut konvergent.

- *Fall 2:* $x = +1$. Hier hilft das Quotientenkriterium nicht weiter (Quotient konstant 1), aber die Reihe selbst hat die Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

  und ist damit bestimmt divergent mit Grenzwert $+\infty$.

- *Fall 3:* $x = -1$. Auch hier versagt das Quotientenkriterium (Quotient diesmal konstant -1), doch die Reihe lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mp \dots,$$

  ist also unbestimmt divergent.

- *Fall 4:* $|x| > 1$. Wir erhalten hier

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + x^{-2n}}{1 + x^{-2n-2}} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x^{-2n}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x^{-2n-2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

  Da $|1/x| < 1$ ist, ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass die Reihe für alle $x \neq \pm 1$ absolut konvergiert, für $x = +1$ bestimmt gegen $+\infty$ und für $x = -1$ unbestimmt divergiert.

Lösung zu Aufgabe 5:

Man kann den Graphen einer Funktion f als Kurve

$$c_f \,:\, [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, f(t))$$

auffassen. Sie ist eine C^1-Kurve (Vorlesung 32.4), denn f ist (mindestens) eine C^1-Funktion über $[0, +\infty)$. Damit ergibt sich für $|\dot{c}_f(t)|$:

$$|\dot{c}_f(t)| = |(1, f'(t))| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

Für die Bogenlängenfunktion (Vorlesung 32.10) zum Startpunkt $x^* = 1$ gilt also

$$S_f(t) = \int_1^t |\dot{c}_f(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = \int_1^t \sqrt{1 + (f'(\tau))^2} \, \mathrm{d}\tau.$$

Die Berechnung von $S_f(t)$ für unserem konkreten Fall $f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ lautet nun:

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= \int\limits_1^t |\dot{c}_f(\tau)|\, d\tau = \\
&= \int\limits_1^t \sqrt{1^2 + \left(2\tau - \frac{1}{8\tau}\right)^2}\, d\tau = \int\limits_1^t \sqrt{1 + 4\tau^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64\tau}}\, d\tau = \\
&= \int\limits_1^t \sqrt{4\tau^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64\tau}}\, d\tau = \int\limits_1^t \sqrt{\left(2\tau + \frac{1}{8\tau}\right)^2}\, d\tau = \\
&= \int\limits_1^t 2\tau + \frac{1}{8\tau}\, d\tau = \left[\tau^2 + \frac{\ln\, \tau}{8}\right]_{\tau=1}^{\tau=t} = t^2 + \frac{\ln t}{8} - 1\,.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Ein Schritt einer einfachsten Polynomdivision führt zur folgenden Zerlegung des Integranden

$$\frac{2x^2}{x^2 - 4x + 3} = 2 + \frac{8x - 6}{x^2 - 4x + 3}\,.$$

Der Bruch wird durch eine Partialbruchzerlegung weiter aufgespalten: Die Nullstellen von $x^2 - 4x + 3$ sind 1 und 3, also $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Wir machen den Ansatz

$$\frac{8x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+B)}{(x-1)(x-3)}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A + B &= 8, \\
3A + B &= 6.
\end{aligned}$$

Um dieses System zu lösen, subtrahiert man z. B. die 1. Gleichung von der 2. und erhält $A = -1$; dies ergibt mit der 1. Gleichung, dass $B = 9$.

Also hat man mit der vollständigen Zerlegung des Integranden

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2}{x^2 - 4x + 3}\, \mathrm{d}x &= \int 2\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}x + \int \frac{9}{x-3}\, \mathrm{d}x \\
&= 2x - \ln|x - 1| + \ln|x - 3| + C
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\int \frac{2x^2}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x = 2x + \ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C$$

mit Integrationskonstante C.

Lösung zu Aufgabe 7:

Es handelt sich bei der Gleichung um eine sogenannte Differenzialgleichung. Um die Richtigkeit der Gleichung nachzuweisen, muss man die entsprechenden Ableitungsfunktionen bilden und sie einsetzen. Dazu ist im Wesentlichen die Produkt- und die Kettenregel zu benutzen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= A\cdot e^{-x}(-1)\cos(x+\varphi) + A\cdot e^{-x}(-\sin(x+\varphi)) \\ &= -A\cdot e^{-x}(\cos(x+\varphi)+\sin(x+\varphi))\,. \end{aligned}$$

Für f'' ergibt sich

$$\begin{aligned} f''(x) &= -A\cdot e^{-x}(-1)(\cos(x+\varphi)+\sin(x+\varphi)) \\ &\qquad + (-A)\cdot e^{-x}(-\sin(x+\varphi)+\cos(x+\varphi)) \\ &= 2A\cdot e^{-x}\sin(x+\varphi) \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2f(x) &= 2A\cdot e^{-x}\cos(x+\varphi), \\ 2f'(x) &= -2A\cdot e^{-x}(\cos(x+\varphi)+\sin(x+\varphi))\,, \\ f''(x) &= 2A\cdot e^{-x}\sin(x+\varphi)\,. \end{aligned}$$

Es ist sofort zu sehen, dass die Addition dieser drei Gleichungen

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

für alle x, A, φ nach sich zieht.

Lösung zu Aufgabe 8:

Die Funktion $f(x) = 1-\frac{1}{2}\arctan x$ ist stetig differenzierbar und hat als Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} < 0 \qquad \text{für } x\in[0,1].$$

Also ist $f(x)$ streng monoton fallend in $[0,1]$, und damit nimmt die Funktion in 0 ihren größten und in 1 ihren kleinsten Wert an:

$$\begin{aligned} \max\{f(x)\,|\,x\in[0,1]\} &= f(0) = 1, \\ \min\{f(x)\,|\,x\in[0,1]\} &= f(1) = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = 1-\frac{\pi}{8} > 0, \end{aligned}$$

Folglich bildet f das Intervall $[0,1]$ in sich ab: $f:[0,1] \longrightarrow [1-\frac{\pi}{8},1] \subset [0,1]$. Die Kontraktionskonstante L berechnet sich nach Satz 26.5 über

$$L = \sup\{|f'(x)| \,:\, x \in [0,1]\}.$$

Um dieses Supremum zu bestimmen, bemerkt man zunächst, dass $f'(x)$ streng monoton steigend und stets negativ ist. Folglich ist $|f'(x)| = -f'(x)$ streng monoton fallend in $[0,1]$. Da $|f'(x)|$ auch im ganzen Intervall noch stetig ist, wird das Supremum im Punkt 0 angenommen:

$$L = \sup\{|f'(x)| \,:\, x \in [0,1]\} = |f'(0)| = \frac{1}{2} < 1.$$

Damit ist f als kontrahierend erkannt.

Wir führen eine Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ mit Startwert $x_0 = 0.5$ durch. *(Da in der Aufgabenstellung kein Startwert spezifiziert war, sind Lösungen mit anderem Startwert selbstverständlich ebenfalls korrekt.)*

Die auf 8 Nachkommastellen gerundeten Werte der ersten 18 Iterationen lauten

n	Näherungswert
0	0.5
1	0.7681762
2	0.67248363
3	0.70399054
4	0.69330042
5	0.69689228
6	0.69568140
7	0.69608915
8	0.69595179
9	0.69599806

n	Näherungswert
10	0.69598248
11	0.69598773
12	0.69598596
13	0.69598655
14	0.69598635
15	0.69598642
16	0.69598640
17	0.69598641
18	0.69598640

Der letzte Wert wird bei dieser Rechengenauigkeit durch weitere Iterationen nicht mehr verändert.

Lösung zu Aufgabe 9:

Um nachzuweisen, dass das angegebene System $S := \{1+\sin t + 2\sin 2t, 2+\sin 2t, 1+\sin t\}$ aus drei trigonometrischen Funktionen eine Basis des von dem System $B := \{1, \sin t, \sin 2t\}$ aufgespannten Raumes V ist, genügt es, die Unabhängigkeit der Funktionen $\{1+\sin t + 2\sin 2t,\ 2+\sin 2t, 1+\sin t\}$ zu zeigen. Denn jede Funktion aus S ist Linearkombination von von Elementen aus B, und damit spannen die Funktionen aus S entweder den Raum V oder nur eine echten

Unterraum von V der Dimension ≤ 2 auf. Letzteres wäre aber nur möglich, wenn die drei Funktionen aus S linear abhängig wären.

Zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit stellen wir die Nullfunktion als Linearkombination der Funktionen aus S dar:

$$\lambda_1(1+\sin t+2\sin 2t)+\lambda_2(2+2\sin 2t)+\lambda_3(1+\sin t)=0 \qquad \text{für alle } t.$$

Nach Satz 34.12 bedeutet Unabhängigkeit nun, dass hieraus $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ folgt. Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssytem

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \text{(II)} & \lambda_1 & + & 0 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \text{(III)} & 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

Dieses muss gelöst werden. Beispielsweise folgt mit der Subtraktion (I) $-$ (II), dass $\lambda_2=0$; aus (III) folgt damit $\lambda_1=0$ und letztlich aus (II), dass $\lambda_3=0$. Dies beweist die Unabhängigkeit der Funktionen in S, die damit eine Basis von V bilden.