

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur Mathematik für Informatiker I

Dieses Aufgabenblatt ist im Umfang einer dreistündigen Klausur angeglichen.
Numerische Berechnungen sind mit Taschenrechnergenauigkeit auszuführen.

Aufgabe 1:

Zeigen Sie folgende Teilbarkeitsregel: Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (also die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ und $x^3 - 1$.

Aufgabe 3:

- a) Vervollständigen Sie die folgenden Verknüpfungstabellen für einen Ring R mit vier Elementen a, b, c, d :

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b		
c	a			a
d	a	b	c	

- b) Ist der so definierte Ring R kommutativ?
c) Handelt es sich um einen Ring mit Eins?

Aufgabe 4:

- a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für

$$a_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$

b) Bestimmen Sie für jedes $x \in (0, +\infty)$ den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{x^n - n}{x^n + n}.$$

c) Untersuchen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}.$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie explizit die Bogenlängenfunktion zum Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{8}$$

im Intervall $[1, +\infty)$ zum Startpunkt $x^* = 1$.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{2x^2}{x^2 - 4x + 3} dx$.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie: Für jedes reelle A und φ erfüllt die Funktion $f(x) = A e^{-x} \cdot \cos(x + \varphi)$ die Gleichung

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8:

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \arctan x$$

eine kontraktive Abbildung des Intervalls $[0, 1]$ in sich ist. Geben Sie die Kontraktionskonstante an und bestimmen Sie den Fixpunkt von f .

Aufgabe 9:

Die Funktionen $\{1, \sin t, \sin 2t\}$ spannen einen dreidimensionalen Vektorraum von Funktionen auf. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\{1 + \sin t + 2 \sin 2t, 2 + \sin 2t, 1 + \sin t\}$ eine Basis dieses Vektorraumes bilden.