# §40: DETERMINANTEN

## 40.1. Motivation

- Gibt es eine möglichst „aussagekräftige" Abbildung, die jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ auf eine Zahl aus $K$ reduziert?
- Die Determinante ist die „sinnvollste" Art, eine solche Abb. zu definieren
- Sie kann axiomatisch fundiert werden und liefert wichtige Aussagen
  - über die Invertierbarkeit der Matrix $A$
  - über die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$
  - über das Volumen eines Parallelepipeds

Welche Forderungen soll die Determinante erfüllen?

40.2. Def.: Sei $K$ ein Körper. Eine Abb. $\det : K^{n \times n} \to K$ heißt Determinantenfunktion, falls gilt:

a) det ist linear in jeder Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ \lambda z_i + \mu z_i' \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i' \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \dots, n$ und $\lambda, \mu \in K$.

(Man sagt auch: Die Determinante ist eine Multilinearform)

b) Ist rang $A < n$, so ist $\det A = 0$

c) $\det I = 1$ für die Einheitsmatrix $I \in K^{n\times n}$.

Beachte: Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.

Gibt es sehr viele Determinantenfunktionen?
Nein! In einem aufwändigen Beweis (siehe z.B. Beutelspacher: Lineare Algebra) kann man zeigen:

40.3. Satz (Eindeutigkeit der Determinante)

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Determinantenfunktion $\det: K^{n\times n} \to K$.

Mit anderen Worten:
Die Forderungen (a)-(c) aus Def. 40.2 liefern eine axiomatische Fundierung des Determinantenbegriffs.

Wie berechnet man Determinanten? Hierzu betrachten wir zunächst nur $(2\times 2)$-Matrizen.

40.4. Satz (Determinante einer $(2\times 2)$-Matrix)

Die Determinante einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ ist gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

Beweis: Diese Abb. erfüllt (a)–(c) der Definition 40.2:

a)
$$\det\begin{pmatrix} \lambda a_1+\mu a_2 & \lambda b_1+\mu b_2 \\ c & d \end{pmatrix} = (\lambda a_1+\mu a_2)d - (\lambda b_1+\mu b_2)c$$

$$= \lambda a_1 d + \mu a_2 d - \lambda b_1 c - \mu b_2 c$$

$$= \lambda (a_1 d - b_1 c) + \mu (a_2 d - b_2 c)$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Linearität in der 2. Zeile zeigt man analog.

b) Wenn die Matrix nur aus Nullen besteht, ist die Determinante Null.
Hat die Matrix Rang 1, so ist $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, d.h.
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{pmatrix} = \lambda bd - \lambda bd = 0.$

c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.$ $\square$

Bem.: Für eine $(1\times 1)$-Matrix $a \in K^{1\times 1}$ ist $\det(a) = a$.

Determinanten für $(n\times n)$-Matrizen lassen sich rekursiv auf $(2\times 2)$-Determinanten zurückführen. Hierzu benötigen wir

40.5. Def.: Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$.
Die aus einer $(n\times n)$-Determinante $D = \det A$ durch Streichung der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte entstehende $(n-1)\times(n-1)$-Determinante $D_{ij}$ nennen wir Unterdeterminante von $D$. Der Ausdruck $A_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ heißt algebraisches Komplement des Elements $a_{ij}$ in der Determinante $D$.

40.6. Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot 9 = 42$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -42.$$

Kommen wir nun zur rekursiven Berechnung einer $(n \times n)$-Determinante:

40.7. Satz (Laplace'scher Entwicklungssatz)

Man kann eine $(n \times n)$-Determinante berechnen, indem man die Elemente einer Zeile (oder Spalte) mit ihren algebraischen Komplementen multipliziert und diese Produkte addiert.

Die Entwicklung nach der $i$-ten Zeile lautet also

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Entwickelt man nach der $j$-ten Spalte, ergibt sich

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

40.8. Beispiel

a) Entwicklung einer $3 \times 3$-Determinante nach der 2. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(63-8) + 5\,(21+2) - 4\,(24+18)$$

$$= -2 \cdot 55 + 5 \cdot 23 - 4 \cdot 42 = -163.$$

b) Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(16+10) - 4(24+18) + 7(15-18)$$

$$= 1 \cdot 26 - 4 \cdot 42 + 7 \cdot (-3) = -163.$$

Wie rechnet man mit Determinanten?

## 40.5. Rechenregeln für Determinanten

a) Transponieren verändert den Wert einer Determinante nicht:

$$\det A = \det A^T$$

(folgt aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz, indem man die Entwicklung nach Zeilen und Spalten vertauscht).

c) Addiert man zu einer Zeile / Spalte das Vielfache einer anderen Zeile / Spalte, so bleibt die Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{(1. Zeile von 2. u. 3. abgezogen)}$$

b) Aus Def. 40.2 (b) folgt:
Sind Spaltenvektoren oder Zeilenvektoren linear abhängig, so ist die Determinante Null:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

d) Vertauscht man zwei Zeilen / Spalten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

e) Die Determinante von Dreiecksmatrizen ist das Produkt der Diagonalelemente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) \cdot 2 = -42$$

(folgt durch rekursives Anwenden des Laplace'schen Entwicklungssatzes).

Man kann also mit dem Gauß-Algorithmus die Matrix auf Dreiecksgestalt bringen (unter Beachtung von (d)), um dann ihre Determinante bequem zu berechnen.
Für große $n$ ist dies wesentlich effizienter als der Laplace'sche Entwicklungssatz.

f) Für $A, B \in K^{n \times n}$ gilt: $\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$.

g) Folgerung: $1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$ für $A$ invertierbar.

h) <u>Vorsicht</u>. Für $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$ gilt

$$\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$$

(und nicht etwa $\det(\lambda A) = \lambda \det A$, denn $\det$ ist linear in <u>jeder</u> Zeile)

Wozu sind Determinanten nützlich?

## 4.10. Bedeutung der Determinanten

a) Mit ihnen kann man testen, ob eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ invertierbar ist:

$$\boxed{A \in K^{n \times n} \text{ ist invertierbar} \iff \det A \neq 0}$$

(vgl. Def. 40.2. b)

b) Man kann mit ihnen lineare Gleichungssysteme lösen (für numerische Rechnungen ist dies jedoch zu ineffizient):

Cramersche Regel:

Ist $A = (a_{*1}, \dots, a_{*n}) \in GL(n, K)$ und $b \in K^n$, so läßt sich die Lösung des lin. Gleichungssystems $Ax = b$ angeben durch

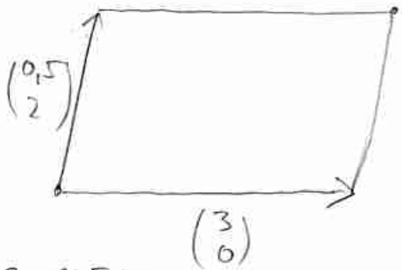
$$x_k = \frac{\det(a_{*1}, \dots, a_{*k-1}, b, a_{*k+1}, \dots, a_n)}{\det A} \qquad (k = 1, \dots, n)$$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8-30}{8-5} = -\frac{38}{3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12+2}{3} = \frac{14}{3}$$

c) $|\det A|$ ist das Volumen des durch die Spaltenvektoren von $A$ aufgespannten Parallelepipeds:




$\left|\det \begin{pmatrix} 3 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = |3 \cdot 2 - 0 \cdot 0,5| = |6|$ Parallelogrammfläche