§ 38 Gauss'scher Algorithmus und lineare Gleichungssysteme

38.1 Motivation

- In Abschnitt 36.4 (Matrix-Vektor-Produkte) haben wir gesehen, dass Matrizen zur kompakten Notation linearer Gleichungssysteme benutzt werden können:

  Die Gleichheit $Ax=b$ (A Matrix, x, b Vektoren) verkörpert die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

  Lineare Gleichungssysteme treten in einer Vielzahl von Anwendungen auf und müssen gelöst werden.

  Vorausgesetzt, A ist eine invertierbare Matrix (vgl. 36.10–36.13), dann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichung $Ax=b$ mit A^{-1} auf der linken Seite den Vektor x, d.h. inverse Matrizen spielen eine Rolle im Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme.

- Aus 37.4 kennen wir den Zusammenhang zwischen Rang und Invertierbarkeit:

  A ($n \times n$-Matrix) ist invertierbar $\iff$ $\operatorname{rang} A = n$.

Aus diesen Gründen ist es von Interesse, ein Verfahren zur Hand zu haben, das

- den Rang einer Matrix ermittelt
- die Inverse (sofern vorhanden) berechnet

  und unter geeigneten Voraussetzungen
- lineare Gleichungssysteme löst.

Dieses alles leistet der <u>Gauß-Algorithmus</u>.

38.2 IDEE

In Beispiel 37.4(b) $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ wurde eine obere Dreiecksmatrix betrachtet, die auf der Diagonalen nur von 0 verschiedene Einträge hatte. Allgemein hat eine $n \times n$-Matrix mit dieser Eigenschaft stets den Rang n.
Die Idee des Gauß-Algorithmus besteht darin, eine beliebige Matrix in eine solche Dreiecksmatrix(*) umzuwandeln, und zwar auf eine Weise, die sicher stellt, dass sich der Rang der Matrix dabei nicht ändert.

(*) bzw. eine ähnliche Form, aus der der Rang leicht abzulesen ist

38.3 DEF. (elementare Zeilenumformungen)

Die folgenden Operationen auf Matrizen heißen <u>elementare Zeilenumformungen</u>:

a) Vertauschen zweier Zeilen,

b) Addition des λ-fachen der Zeile a_{j*} zur Zeile a_{i*} $(\lambda \in \mathbb{R})$

c) Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$.

38.4 SATZ:

Bei elementaren Zeilenumformungen bleibt der Rang einer Matrix erhalten.

<u>Beweis</u>:

a) offensichtlich, da $\mathrm{Span}(a_{1*}, \dots, a_{m*})$ unverändert bleibt

b) Wir zeigen $\mathrm{Span}(a_{1*}, \dots, a_{i*}, \dots, a_{m*}) = \mathrm{Span}(a_{1*}, \dots, a_{i*} + \lambda a_{j*}, \dots, a_{m*})$.

„$\subset$": Es sei $v \in \mathrm{Span}(a_{1*}, \dots, a_{i*}, \dots, a_{m*})$, also

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 a_{1*} + \dots + \lambda_i a_{i*} + \dots + \lambda_j a_{j*} + \dots + \lambda_m a_{m*} \\ &= \lambda_1 a_{1*} + \dots + \lambda_i (a_{i*} + \lambda a_{j*}) + \dots + (\lambda_j - \lambda\lambda_i) a_{j*} + \dots + \lambda_m a_{m*} \\ &\in \mathrm{Span}(a_{1*}, \dots, a_{i*} + \lambda a_{j*}, \dots, a_{m*}) \end{aligned}$$

„$\supset$" wird analog gezeigt.

c) analog zu b)

$\square$

38.5 Gauß'scher Algorithmus

Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$.

▷ Betrachte a_{11}.

- Ist $a_{11} \neq 0$, so subtrahiere von jeder Zeile a_{i*}, $i \geq 2$, das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile. Danach ist a_{11} das einzige von Null verschiedene Element der ersten Spalte.
- Ist $a_{11} = 0$, aber das erste Element a_{i1} einer anderen Zeile $\neq 0$, so vertausche diese beiden Zeilen (a_{1*} und a_{i*}).
  Mit der neuen Matrix verfahre wie oben.
- Sind alle a_{i1}, $i = 1, \dots, m$, gleich 0, so beachte die erste Spalte nicht weiter und verfahre wie oben mit a_{12} statt a_{11}; sofern auch die 2. Spalte nur Nullen enthält, gehe zur 3. Spalte usw.

Im Ergebnis dieses 1. Schrittes erhalten wir eine Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(evtl. mit zusätzlichen Nullspalten links)}$$

▷ Nun wird die erste Zeile und Spalte nicht mehr weiter betrachtet und auf die verbleibende Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

dasselbe Verfahren angewendet. Damit wird A' umgewandelt in

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \cdots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

▷ Danach betrachtet man die wiederum um eine Zeile und Spalte verkleinerte Teilmatrix usw., bis die gesamte Matrix auf eine Form A^* wie die folgende gebracht ist:

$$A^* = \begin{pmatrix} a & * & * & \cdots & & * \\ 0 & b & * & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & c & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(„*" beliebiger Wert)

In dieser Matrix heißt der erste von 0 verschiedene Eintrag einer Zeile (a, b, c, d) <u>Leitkoeffizient.</u> Im gesamten Bereich unterhalb und links eines Leitkoeffizienten enthält die Matrix nur Nullen:

$$\begin{pmatrix} a & * & * & \cdots & & * \\ 0 & b & * & \cdots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{c} & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & * \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix heißt <u>Matrix in Zeilen-Stufen-Form</u>.

Formalisierung als rekursive Funktion:

```
Gauss (i,j):
    falls i=m oder j>n:
        Ende
    falls a_ij = 0:
        suche a_kj ≠ 0, k>i ; wenn dies nicht existiert:
            Gauss (i, j+1)
            Ende
        vertausche Zeile i mit Zeile k
    für alle k>i:
        subtrahiere (a_kj / a_ij) · Zeile i von Zeile k        (*)
    Gauss (i+1, j+1)
    Ende.
```

Das Matrixelement a_{ij}, das in der Zeile (*) als Nenner auftritt, heißt <u>Pivotelement.</u>

38.6 Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3\times \\ -2\times \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -4 & -11 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2\times \\ +1\times \end{matrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1\times \end{matrix}$$

$$A^* = A''' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

38.7 Satz

Der Rang einer Matrix in Zeilen-Stufen-Form ist gleich der Anzahl ihrer Leitkoeffizienten.

Beweis: Die Anzahl der Leitkoeffizienten sei l.

Jede Zeile, die einen Leitkoeffizienten enthält, ist linear unabhängig von dem System der darunter stehenden Zeilen.

Nimmt man also von unten nach oben die linear unabhängigen Zeilen zur Basis hinzu, so folgt, dass $\dim \operatorname{Span}(a_{1*}, \dots, a_{m*}) \geq l$.

Andererseits ist auch $\dim \operatorname{Span}(a_{1*}, \dots, a_{m*}) \leq l$,

da es nur l Zeilenvektoren $\neq 0$ gibt. $\square$

38.8 Satz

Jede elementare Zeilenumformung für $m \times n$-Matrizen kann als Multiplikation von links mit einer geeigneten invertierbaren $m \times m$-Matrix ausgedrückt werden:

- Vertauschung der Zeilen i und j:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \cdots & 1 & & \vdots \\
& & \vdots & 1 & \vdots & & \\
& & 1 & \cdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & & & & 1 & 0 \\
0 & \cdots & & & & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

- Addition von $\lambda \times$ Zeile j zu Zeile i:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & \cdots & \boxed{\lambda} & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \\
\vdots & & & & 1 & \\
\vdots & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

- Multiplikation von Zeile i mit $\lambda \neq 0$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & & & \vdots \\
\vdots & & & \lambda & & \vdots \\
\vdots & & & & 1 & \\
\vdots & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

(ohne Beweis)

38.9 Umformung einer invertierbaren Matrix zur Einheitsmatrix

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

Wegen $\operatorname{rang} A = n$ hat sie die Zeilen-Stufen-Form
$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Multiplikation jeder Zeile (a_{i*}) mit $\frac{1}{a_{ii}}$ ergibt eine obere Dreiecksmatrix, deren sämtliche Diagonalelemente gleich 1 sind.

Mittels weiterer elementarer Zeilenumformungen wird die Matrix in die Einheitsmatrix umgeformt:

- Subtrahiere für alle $i < n$ das a_{in}-fache der Zeile n von Zeile i.
  Danach ist $a_{nn} = 1$ das einzige Element $\neq 0$ in der letzten Spalte.
- Subtrahiere für alle $i < n-1$ das $a_{i,n-1}$-fache der Zeile $n-1$ von Zeile i

usw.

38.10 SATZ: Berechnung der inversen Matrix

Wird eine invertierbare $n \times n$-Matrix A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E umgeformt, so erhält man die Inverse A^{-1}, indem man dieselben Umformungen auf die Einheitsmatrix anwendet.

38.11 Bsp.

$$\begin{array}{ccc} A & E & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & -2\times \quad -4\times \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & +1\times \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} & -1\times \quad -2\times \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \\ E & A^{-1} & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis von Satz 38.10:

Es seien $D_1, \dots, D_k$ die Matrizen, die gemäß Satz 38.8 die elementaren Zeilenumformungen darstellen, durch die A in E übergeht.

Dann ist

$$E = D_k D_{k-1} \dots D_1 A = (D_k D_{k-1} \dots D_1) A$$

Damit ist

$$A^{-1} = D_k D_{k-1} \dots D_1 = D_k D_{k-1} \dots D_1 E . \qquad \square$$

Wie kann man den Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssystemen verwenden?

38.12. Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Falls $b \neq 0$, spricht man von einem inhomogen Gleichungssystem. $Ax = 0$ heißt zugehöriges homogenes Gleichungssystem.

Die Matrix $(A, b) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, d.h. A mit rechts angefügter Spalte b, heißt erweiterte Matrix des Systems.

Interpretiert man A als lineare Abb., so sind Lösungen des Systems $Ax = b$ gerade die Vektoren, die durch A auf b abgebildet werden.

38.13 Satz (Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme)

a) Die Lösungsmenge von $Ax = 0$ ist $\ker A$ und daher ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

b) Es sind äquivalent:

i) $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung

ii) $b \in \operatorname{Im} A$

iii) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, b)$.

c) Ist w eine Lösung von $Ax = b$, so ist die vollständige Lösungsmenge gleich $w + \ker A := \{ w + x \mid x \in \ker A \}$

Beweis:

a) klar nach Def. von $\ker A$

b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Ex. eine Lösung w, so gilt $Aw = b$, d.h. $b \in \operatorname{Im} A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $b \in \operatorname{Im} A$, so ist jedes Urbild w von b Lösung von $Ax = b$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $b \in \operatorname{Im} A$, so ist b Linearkomb. der Spalten von A. Damit ist $\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ist $\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A$, so ist b Linearkomb. der Spalten von A. Somit ist $b \in \operatorname{Im} A$. $\square$

c) „$\subset$": Sei $y \in \ker A$ und sei w Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

$$A(w+y) = Aw + Ay = b + 0 = b$$

d.h. $w+y$ ist Lösung von $Ax = b$.

Also liegt $w + \ker A$ in der Lösungsmenge von $Ax = b$.

„$\supset$": Sei v eine weitere Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

d.h. $v - w \in \ker A$

$\Rightarrow v \in w + \ker A$

Somit liegt die Lösungsmenge von $Ax = b$ in $w + \ker A$.

38.14. Bemerkungen

a) Ist $\operatorname{rang}(A, b) > \operatorname{rang} A$, so hat $Ax = b$ keine Lösung

b) Jedes homogene System hat mindestens eine Lösung: 0

c) Zur Lösung des inhomogenen Systems benötigt man
- die vollständige Lösung des homogenen Systems
- eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

d) Aus (b) und (c) folgt: Das inhomogene System hat genau dann eine eindeutige Lösung, falls $\ker A = 0$ ist.

Um mit Hilfe des Gauß-Algorithmus' das Lösungsverhalten von $Ax = b$ zu studieren, bezeichnen wir mit

$$\text{Lös}(A, b)$$

die Lösungsmenge von $Ax = b$. Wir benötigen

38.15 Lemma (<u>Invarianz der Lösungsmenge unter Matrixmultiplikation</u>)

Ist $B \in GL(m, K)$ und $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$, so gilt

$$\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(BA, Bb)$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" Ist $x \in \text{Lös}(A, b)$, gilt $Ax = b$

$\Rightarrow \quad BAx = Bb \quad \Rightarrow \quad x \in \text{Lös}(BA, Bb)$

„$\Leftarrow$" Sei $x \in \text{Lös}(BA, Bb) \quad \Rightarrow \quad BAx = Bb$

Da $B \in GL(m, K)$, ex. $B^{-1} \in GL(m, K)$ nach 36.12

$\Rightarrow \quad B^{-1}BAx = B^{-1}Bb$

$\Rightarrow \quad Ax = b \quad$ d.h. $\quad x \in \text{Lös}(A, b)$ $\square$.

Mit diesem Lemma gilt:

38.16. Satz (<u>Invarianz der Lösungsmenge unter elementaren Zeilenumformungen</u>)

Ist die Matrix A' aus A durch elementare Zeilenumformungen entstanden und der Vektor b' aus b durch die gleichen Zeilenumformungen, so gilt:

$$\text{Lös}(A', b') = \text{Lös}(A, b).$$

<u>Beweisidee</u>: Elementare Zeilenumformungen entsprechen nach 38.8 der Multiplikation mit invertierbaren Matrizen $D_k, D_{k-1}, \ldots, D_1$. $\square$

Nun zum eigentlichen Thema!

38.17. Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Zur Lösung von $Ax = b$ geht man in vier Schritten vor:

i) Schritt 1: Bringe die Matrix (A, b) in Gauß-Jordan-Form (A', b').

Die Gauß-Jordan-Form ist eine spezielle Zeilen-Stufen-Form, bei der alle Leitkoeffizienten 1 sind und oberhalb der Leitkoeffizienten nur Nullen stehen.

Beispiel:

$$(A', b') = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \end{array}$$

ist in Gauß-Jordan-Form

$\operatorname{rang} A' = 4$ und $\operatorname{rang} (A', b') = 4$

$\Rightarrow$ Es ex. Lösungen, wir müssen weiter machen.

ii) Schritt 2: Finde die Lösungsmenge U des homogenen Gleichungssystems $A'x = 0$.

Wähle hierzu die Unbekannten, die zu den Spalten ohne Leitkoeffizienten gehören, als freie Parameter.

Beispiel:

Im obigen Beispiel setzen wir $x_3 := \lambda$, $x_6 := \mu$.
Dann hat das homogene System die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} x_1 &= -3\lambda - 8\mu \\ x_2 &= -2\lambda - \mu \\ x_4 &= -5\mu \\ x_5 &= -4\mu \end{aligned}$$

Als Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda - 8\mu \\ -2\lambda - \mu \\ \lambda \\ -5\mu \\ -4\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

iii) Schritt 3: Suche eine spezielle Lösung w des inhomogenen Gleichungssystems $A'x = b'$.

Setze hierzu die Unbekannte, die zu den Spalten ohne Leitkoeffizienten gehören, gleich 0.
(möglich, da dies freie Parameter sind)

Beispiel: Mit $x_3 = 0$ und $x_6 = 0$ erlaubt die Gauß-Jordan-Form im obigen Beispiel die direkte Bestimmung von x_1, x_2, x_4, x_5 als

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iv) Schritt 4: Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist dann $w + U$.

Beispiel:

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

38.18. Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Sei $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^n$, $b \in K^m$.

Wir wissen: $\text{Lös}(A,0) = \ker A$ ist Unterraum des K^n.

(Jedoch ist $\text{Lös}(A,b)$ i. A. kein Unterraum.)

Für die Dimension von $\text{Lös}(A,0)$ gilt:

$$\underbrace{\dim \ker A}_{\dim \text{Lös}(A,0)} + \underbrace{\dim \operatorname{im} A}_{\operatorname{rang} A} = \underbrace{\dim K^n}_{n}$$

$$\Rightarrow \quad \dim \text{Lös}(A,0) = n - \operatorname{rang} A.$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$n = 3$, $\operatorname{rang} A = 2$

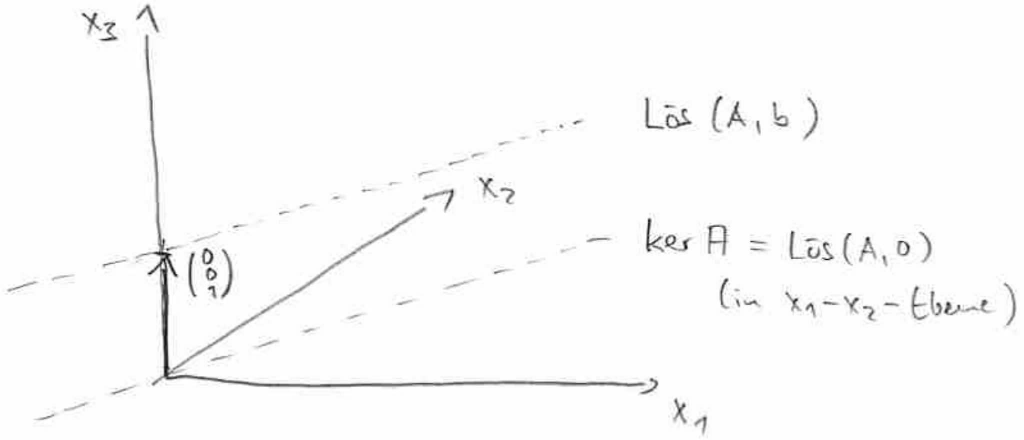
$\Rightarrow \dim \text{Lös}(A,0) = 1$.

$$\text{Lös}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \ker A \qquad \text{Ursprungsgerade}$$

Spezielle Lösung des i-homogenen Systems: $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

allgem. Lösung:

$$\text{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Gerade}$$



x_3
Lös (A, b)
x_2
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
ker A = Lös (A, 0)
(in x_1-x_2-Ebene)
x_1