§37: DER RANG EINER MATRIX

37.1. Motivation

- Interpretiert man eine Matrix als lin. Abb., so haben die Spaltenvektoren eine besondere Bedeutung: Sie sind die Bilder der Basisvektoren.
- Wir wollen die lineare Abhängigkeit / Unabhängigkeit dieser Spaltenvektoren genauer untersuchen. Dies liefert u.A. ein wichtiges Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen.

37.2. Def.: Unter dem (Spalten-) Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.
(Schreibweise: $\operatorname{rang} A$)

Welche Aussagen gelten für den Rang?

37.3. Satz (Aussagen über den Rang einer Matrix)

Ist $f: K^n \to K^m$ eine lineare Abb. mit zugehöriger Matrix $A \in K^{m \times n}$ und Spaltenvektoren $a_{*1}, \dots, a_{*n}$, so gilt:

a) $\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}(a_{*1}, \dots, a_{*n})$

b) $\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rang} A$

c) $\dim \ker(f) = n - \operatorname{rang} A$

Beweis:

a) „$\supset$": Klar, da $a_{*1}, \dots, a_{*n}$ die Bilder der Basisvektoren sind.

„$\subset$":

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 a_{*1} + \dots + x_n a_{*n}$$

d.h. jedes Bildelement ist Linearkombination der Spaltenvektoren

b) Folgt direkt aus (a).

c) Folgt aus Satz 35.5. $\square$.

37.4. Beispiele

a) Nach 36.13.(d) ist $A \in K^{n \times n}$ genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rang} A = n$ ist.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ hat Rang 3:

$a_{*2}, a_{*3} \notin \operatorname{span}(a_{*1})$

$a_{*3} \notin \operatorname{span}(a_{*1}, a_{*2})$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ hat Rang 2: a_{*1}, a_{*2} sind linear unabhängig und

$a_{*3} = a_{*1} + 2 \cdot a_{*2}$

37.5. Def.: Vertauscht man bei einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ die Rolle von Zeilen und Spalten, so entsteht die <u>transponierte Matrix</u> $A^T \in K^{n \times m}$.

Der Rang von A^T beschreibt die Zahl der linear unabhängigen Zeilen von A. Man nennt ihn daher auch den <u>Zeilenrang</u> von A.

37.6. <u>Beispiel</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =: B$$

rang $A = 2$: a_{*1}, a_{*2} linear unabhängig.

$$a_{*3} = a_{*1} + 2a_{*2}$$
$$a_{*4} = 2a_{*1} + a_{*2}$$

rang $B = 2$: b_{*1}, b_{*2} linear unabhängig

$$b_{*3} = 2b_{*1}.$$

In diesem Beispiel stimmen also Spaltenrang u. Zeilenrang überein. Ist dies Zufall?

Man kann zeigen:

37.7 Satz (<u>Gleichheit von Spaltenrang und Zeilenrang</u>)

Für $A \in K^{m \times n}$ sind Spalten- und Zeilenrang identisch.