# § 36: MATRIXSCHREIBWEISE VON LINEAREN ABBILDUNGEN

## 36.1. Motivation

- Wir haben gesehen, dass lineare Abbildungen sich durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren ausdrücken lassen.
- Mit Hilfe von Matrizen können wir dies kompakt aufschreiben und die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen elegant berechnen.

## 36.2. Struktur linearer Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen

Sei $K$ ein Körper (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann ist $f: K^n \to K^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

eine lineare Abbildung: Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

$$f(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{1n}(\lambda x_n + \mu y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + a_{mn}(\lambda x_n + \mu y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Umgekehrt kann man sogar zeigen, dass jede lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ diese Struktur besitzt: Nach 35.9 ist eine lineare Abb. von $K^n$ nach $K^m$ durch die Bilder der Basisvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \in K^n$ eindeutig bestimmt. Sind diese Bilder durch $\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix} \in K^m$ gegeben, so ist $(*)$ die entsprechende Abbildung.

Die Struktur $(*)$ motiviert folgende Definition.

**36.3. Def.:** Sei $K$ ein Körper. Das rechteckige Schema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ heißt <u>$m \times n$-Matrix</u>. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $K$ bezeichnen wir mit $K^{m \times n}$. Die Vektoren $\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$ heißen <u>Spaltenvektoren</u> von $A$, und $(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ bilden die Zeilenvektoren. Die Matrix $A$ wird auch als $(a_{ij})$ geschrieben. Dabei bezeichnet $i$ den <u>Zeilenindex</u> (bleibt in jeder Zeile konstant), und $j$ ist der <u>Spaltenindex</u>.

## 36.4. Matrix-Vektor-Produkt

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in K^m$, so schreiben wir statt

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

jetzt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrix } A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Vektor } x} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_{\text{Vektor } c}$$

also kurz: $Ax = c$.

Ein solche Schreibweise ist sowohl für lineare Abbildungen nützlich als auch für lineare Gleichungssysteme (spätere Vorlesung). Sie definiert das Produkt zwischen einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und einem Vektor $x \in K^n$ als $Ax = c$ mit $c \in K^m$ und

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

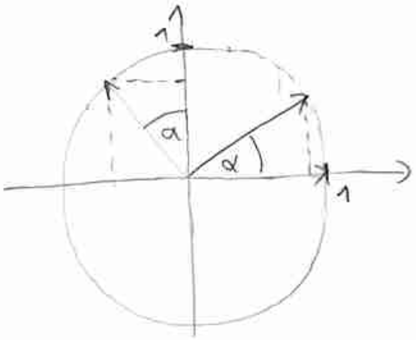
Jede lineare Abb. $f: K^n \to K^m$ kann also geschrieben werden als

$$f(x) = Ax$$

mit $A \in K^{m \times n}$. Die Spalten von $A$ sind die Bilder der Basisvektoren.

## 36.5. Beispiele für lineare Abbildungen in Matrixschreibweise

b) Drehung im $\mathbb{R}^2$




$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Drehung um einen Winkel $\alpha$ lautet also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Drehungen werden gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt.

a) Streckung

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ ab.

c) Drehung im $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ beschreibt eine Drehung

in der $x_1$-$x_3$-Ebene (entlang der $x_2$-Achse passiert nichts)

d) Translationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

sind keine linearen Abbildungen!

Welche Rechenoperationen lassen sich mit Matrizen durchführen?

**36.6. Def.:** Sei $K$ ein Körper.

a) Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $\lambda \in K$ definiert man die <u>skalare Multiplikation</u> komponentenweise:

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

b) Die <u>Addition</u> zweier Matrizen geschieht ebenfalls komponentenweise:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \forall\ A = (a_{ij}) \in K^{m \times n},\ B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$$

c) Bei der <u>Multiplikation</u> von $A \in K^{l \times m}$ mit $B \in K^{m \times n}$ geht man <u>nicht</u> komponentenweise vor:

$A \cdot B = C \in K^{l \times n}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad (\text{„Zeile mal Spalte"})$$

**36.7. <u>Beispiele</u>:** $K = \mathbb{R}$

a)
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9 \\ 4 \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 7 \cdot 8 & 4 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 7 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

Welche Rechenregeln folgen aus Def. 36.6.?

36.8. Satz (Eigenschaften der Matrixoperationen)

Sei $K$ ein Körper. Dann gilt:

a) $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins, d.h.

$(K^{n\times n}, +)$ ist eine kommutative Gruppe:

- Assoziativgesetz: $(A+B)+C = A+(B+C)$
- neutrales Element: $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$
- inverses Element zu $A$ ist $-A = (-1)A$.
- Kommutativgesetz: $A+B = B+A$

$(K^{n\times n}, \cdot)$ ist ein Monoid:

- Assoziativgesetz: $(A\cdot B)\cdot C = (A\cdot B)\cdot C$
- neutrales Element:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

Es gelten die Distributivgesetze

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + B\cdot C$$

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C.$$

b) $K^{n\times m}$ ist ein $K$-Vektorraum:

$(K^{n\times m}, +)$ ist eine kommutative Gruppe:

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$1\cdot A = A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$

## 36.9. Bemerkungen

a) Im Allgemeinen liegt keine Kommutativität bzgl. der Multiplikation vor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 1\cdot 4 & 2\cdot 3 + 1\cdot 6 \\ 7\cdot 5 - 4\cdot 4 & 7\cdot 3 - 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 3\cdot 7 & 5\cdot 1 - 3\cdot 4 \\ 4\cdot 2 + 6\cdot 7 & 4\cdot 1 - 6\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -7 \\ 50 & -20 \end{pmatrix}$$

b) Ebenso ist eine $(n\times n)$-Matrix im Allgemeinen nicht invertierbar bzgl. der Multiplikation.

c) $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist nicht nullteilerfrei:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) $K^{n\times m}$ ist isomorph zum Vektorraum $K^{n\cdot m}$.

e) Spaltenvektoren aus $K^m$ können als $(m\times 1)$-Matrizen aufgefasst werden. Vektoraddition und skalare Multiplikation sind Spezialfälle der entsprechenden Matrixoperationen.

f) Die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen entspricht der Multiplikation ihrer Matrizen.

$$K^{\ell} \xrightarrow[A\in K^{m\times \ell}]{g} K^m \xrightarrow[B\in K^{n\times m}]{f} K^n$$

$f\circ g: K^{\ell} \to K^n$ wird durch $B\cdot A \in K^{n\times \ell}$ repräsentiert.

## 36.10. Inverse Matrizen

Im Allgemeinen hat $A \in K^{n\times n}$ kein multiplikatives Inverses $A^{-1}$.
In vielen Fällen existiert jedoch eine inverse Matrix.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{denn: } \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5\cdot 4 - 2\cdot 6 & -5\cdot 6 + 6\cdot 5 \\ 2\cdot 4 - 4\cdot 2 & -2\cdot 6 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix werden wir in einer späteren Vorlesung kennenlernen.

**36.11. Def.:** Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt <u>invertierbar</u> (<u>umkehrbar</u>, <u>regulär</u>), falls eine Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ ex. mit $AA^{-1} = I$.
Die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n\times n}$ wird mit <u>$GL(n,K)$</u> bezeichnet.

**36.12 Satz** (<u>Gruppeneigenschaft von $GL(n,K)$</u>)

$GL(n,K)$ bildet mit der Matrizenmultiplikation eine multiplikative (nichtkommutative) Gruppe.

## 36.13. Bemerkungen

a) GL steht für general linear group.

b) Sind $A, B \in GL(n, K)$, so ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, denn:

$$A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} A^{-1} = A\, I\, A^{-1} = A A^{-1} = I.$$

c) Ist $n \neq m$, so nennt man $A \in K^{m \times n}$ eine nichtquadratische Matrix. Nichtquadratische Matrizen sind niemals invertierbar. Allerdings kann man eine so genannte Pseudoinverse angeben ($\to$ spätere Vorlesung).

d) Die Invertierbarkeit einer Matrix entspricht der Bijektivität ihrer linearen Abb.
Nach dem Beweis von Satz 35.10 ist eine lineare Abb. zwischen endl. dim. Vektorräumen genau dann bijektiv, wenn Basen auf Basen abgebildet werden.

Folgerung: $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten von $A$ eine Basis des $K^n$ bilden.