§ 35: LINEARE ABBILDUNGEN

35.1. Motivation

- Nachdem wir wichtige Eigenschaften von Vektorräumen kennen, macht es Sinn zu untersuchen, wie Abbildungen zwischen Vektorräumen aussehen können. Lineare Abbildungen sind die wichtigsten Abb. zwischen Vektorräumen.
- Der Basisbegriff liefert ein wichtiges Werkzeug zur Beschreibung linearer Abb.

35.2. Def.:

Seien U, V K-Vektorräume. Eine Abbildung $f: U \to V$ heißt <u>lineare Abb.</u> (<u>Vektorraumhomomorphismus</u>), falls gilt:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in U$

b) $f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall \lambda \in K, \forall u \in U$

U und V heißen <u>isomorph</u>, wenn es eine bijektive lineare Abb. $f: U \to V$ gibt. Wir schreiben hierfür $U \simeq V$.

Bem.: Ähnlich wie bei Gruppenhomomorphismen (vgl. 8.16), überführt ein Vektorraumhomomorphismus die Verknüpfungen in U (Addition, skalare Multipl.) in Verknüpfungen in V.
Die Bedingungen (a) und (b) fasst man oft in eine Bed. zusammen:

$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v). \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v \in U.$

D.h. Linearkomb. in U werden in Lin.-Komb. in V überführt

35.3. Beispiele

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ ist linear:

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + \mu y_1) + \lambda x_3 + \mu y_3 \\ -\lambda x_2 - \mu y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2y_1 + y_3 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \quad x \mapsto x+1$ ist keine lin. Abb., denn

$$1 = f(0+0) \neq f(0) + f(0) = 1+1.$$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls nichtlinear:

$$f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2 f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

35.4. In Analogie zu 8.16 und 8.17 gibt es auch für Vektorräume <u>Monomorphismen</u>, <u>Epimorphismen</u>, <u>Isomorphismen</u>, <u>Endomorphismen</u> und <u>Automorphismen</u>.
Ferner ist für $f: U \to V$

$$\mathrm{Im}(f) := \{ f(u) \mid u \in U \} \quad \text{das } \underline{\text{Bild}} \text{ von } f$$

$$\mathrm{Ker}(f) := \{ u \in U \mid f(u) = 0 \} \quad \text{der } \underline{\text{Kern}} \text{ von } f.$$

Für lineare Abb. lassen sich einige wichtige Eigenschaften zeigen:

35.5. Satz (Eigenschaften linearer Abbildungen)

a) Ist $f: U \to V$ ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabb. f^{-1} linear.

b) Die lineare Abb. $f: U \to V$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ist.

c) Ist $f: U \to V$ linear, so ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein Unterraum von U und $\mathrm{Im}(f)$ ein Unterraum von V.

d) $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim U$.

35.6. Beispiel

Betrachte die lineare Abb.:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_3 \right\}$ ist eine Ursprungsebene im $\mathbb{R}^3$ (und damit ein 2-dim. Unterraum des $\mathbb{R}^3$)

$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^2$ (und damit ein eindim. Unterraum des $\mathbb{R}^2$)

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Welche Rolle spielen Basen bei der Beschreibung linearer Abbildungen? Hierzu betrachten wir zunächst Basisdarstellungen von Vektoren

35.7. Satz (Eindeutigkeit der Darstellung in einer festen Basis)

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des K-Vektorraums V. Dann gibt es zu jedem Vektor $v \in V$ eindeutig (!) bestimmte Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i .$$

Bem.: Diese x_i heißen Koordinaten von v bzgl. B.

Wir schreiben $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$.

Beweis: Die Existenz der Darstellung ist klar, da $V = \text{span}(B)$. Zu zeigen ist also nur die Eindeutigkeit. Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \vec{0} = v - v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) b_i$$

$\Rightarrow \quad x_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$, da b_i lin. unabhängig. $\square$.

Selbstverständlich liefern unterschiedliche Basen auch unterschiedliche Koordinatendarstellungen eines Vektors. Wie kann man diese Darstellungen ineinander umrechnen?

35.8. Umrechnung von Koordinatendarstellungen

Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ sei eine Basis $B = \{b_1, b_2\}$ gegeben. Bzgl. B habe ein Vektor v die Darstellung $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$.

Wir betrachten die neue Basis $C = \{c_1, c_2\}$ mit $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$, $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. Wie lautet die Darstellung von v in C?

Ansatz: $v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}_C$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}_C = \lambda c_1 + \mu c_2$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu \end{pmatrix}_B$$

Die Bestimmungsgleichungen

$$2\lambda + \mu = x$$
$$2\lambda + 2\mu = y$$

haben die Lösung

$$\lambda = x - \tfrac{1}{2} y$$
$$\mu = -x + y$$

Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2}2 \\ -5 + 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_C$.

Basen ermöglichen es, eine lineare Abbildung durch wenige Daten zu beschreiben: Es genügt zu wissen, was mit den Basisvektoren passiert.

35.9. Satz (Charakterisierung einer lin. Abb. durch ihre Wirkung auf die Basis)

Seien U, V K-Vektorräume und $b_1, \dots, b_n$ sei eine Basis von U. Ferner seien $v_1, \dots, v_n \in V$.
Dann gibt es genau eine lineare Abb.: $f: U \to V$ mit $f(b_i) = v_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Beweis: Sei $u \in U$ und $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$.

Setze $f(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

Man prüft leicht nach, dass f linear ist und $f(b_i) = v_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass g eine weitere lin. Abb. mit $g(b_i) = v_i \;\; \forall i$ ist.

$$\Longrightarrow \quad g(u) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, g(b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i) \overset{\text{lin}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = f(u).$$

Somit stimmen f und g überall überein. $\square$

Als weiteres wichtiges Resultat, das auf Basen beruht, kann man zeigen:

35.10 (<u>Isomorphie endlichdimensionaler Vektorräume</u>)

Seien U, V zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind U und V genau dann isomorph, wenn sie die selbe Dimension haben.

$$U \simeq V \iff \dim U = \dim V.$$

<u>Bem.:</u> Dieser Satz besagt z. B., dass es im Wesentlichen nur einen einzigen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ gibt: den $\mathbb{R}^n$!

<u>Beweisskizze:</u>

Man zeigt:

a) Ein Isomorphismus zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen bildet Basen auf Basen ab.

b) Eine lineare Abb. zweier gleich dimensionaler Vektorräume, die eine Basis auf eine Basis abbildet, ist ein Isomorphismus.

$\square$