TEIL D: LINEARE ALGEBRA

§34: VEKTORRÄUME

34.1. Motivation

- Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann man Vektoren addieren und mit einem Skalar multiplizieren.

- Wir wollen die Grundkonzepte algebraisch formalisieren, um sie auch auf andere Situationen anwenden zu können.
- wichtig in Codierungstheorie, Robotik, Computergrafik, Comp. Vision

34.2. Def.: Sei K ein Körper. Ein <u>K-Vektorraum</u> ist eine Menge V, auf der eine Verknüpfung $+$ und eine skalare Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$ definiert sind mit

a) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

b) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$

c) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

d) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in K,\ \forall v, w \in V$

e) $(\lambda+\mu) v = \lambda v + \mu v \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$

Die Elemente von V heißen <u>Vektoren</u>, Elemente aus K heißen <u>Skalare</u>. Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sprechen wir von einem <u>reellen</u> bzw. <u>komplexen</u> Vektorraum.

Bem.: Für Skalare verwenden wir meist kleine griechische Buchstaben wie λ, μ, ν. Vektoren bezeichnen wir mit kleinen lat. Buchstaben wie u, v, w. Nur wenn Verwechslungsgefahr besteht, verwenden wir Pfeile, z.B. um den Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ von der skalaren Null 0 zu unterscheiden.

34.3. Satz (<u>Rechenregeln für Vektorräume</u>)

In einem K-Vektorraum V gilt:

a) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$

b) $0 \cdot v = \vec{0} \quad \forall v \in V$

c) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V$

<u>Beweis von (a)</u>:

$$\lambda \cdot \vec{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}}}{=} \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) \underset{\substack{\uparrow \\ 34.2(d)}}{=} \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0}$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten $\lambda \cdot \vec{0}$, folgt $\vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$. □

34.4. <u>Beispiele</u>

a) $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

d) Für einen Körper K ist K^n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein K-Vektorraum.

e) Insbes. ist $\mathbb{Z}_2^n$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. Er besteht aus allen n-Tupeln von Nullen und Einsen.
Beispielsweise lassen sich Integer-Werte in Binärdarstellung als Elemente des Vektorraums $\mathbb{Z}_2^{32}$ interpretieren.
Die Vektorräume $\mathbb{Z}_2^n$ spielen eine große Rolle in der Codierungstheorie. Lineare Codes verwenden Teilmengen des $\mathbb{Z}_2^n$, bei denen beim Auftreten eines Übertragungsfehlers mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Element außerhalb der Teilmenge entsteht.
Vgl. 11.3.

f) Funktionenräume sind wichtige Vektorräume.
Definiert man auf $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ eine Vektoraddition und eine skalare Multiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

So ist $\mathcal{F}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist die Funktion $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

g) Die Polynome $K[x]$ über einem Körper K bilden einen K-Vektorraum, wenn man als skalare Multiplikation definiert:

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k := \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k \qquad \forall \lambda \in K$$

Zu Gruppen und Ringen haben wir Untergruppen und Unterringe definiert (vgl. 8.5, 9.5). Ähnliches ist auch für Vektorräume möglich.

34.5. Def.: Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$. Ist U mit den Verknüpfungen von V selbst wieder ein K-Vektorraum, so heißt U <u>Unterraum</u> (<u>Untervektorraum</u>, <u>Teilraum</u>) von V.

34.6. Satz (<u>Unterraumkriterium</u>)

Sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist U genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:

a) $u + v \in U \quad \forall u, v \in U$

b) $\lambda u \in U \quad \forall \lambda \in K, \forall u \in U$.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$": Offensichtlich, da U Vektorraum.

„$\Leftarrow$": Nach 8.5 ist U Untergruppe von V, denn

$$u + v \in U \quad \forall u, v \in U$$

$$-u \underset{34.3.c}{=} (-1)\,u \underset{(b)}{\in} U.$$

Da V kommutativ ist, ist U eine kommutative Gruppe, d.h. 34.2.(a) ist erfüllt.
Aus (b) folgt, dass $\cdot$ eine Abb.: von $K \times U$ nach U ist.

Die Eigenschaften (b)–(e) der Vektorraumdef. 34.2 übertragen sich von der Vektorraumeigenschaft von V.

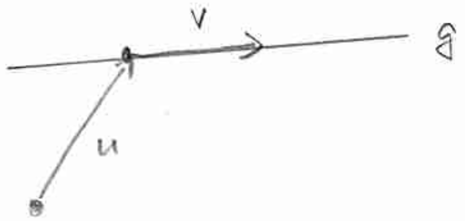
$\square$

34.7. Beispiele

a) Ein K-Vektorraum V hat die trivialen Unterräume $\{0\}$ und V.

b) Lineare Codes sind Unterräume im $\mathbb{Z}_2^n$.

c)



Sind Geraden Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

Ein Unterraum muss stets den Nullvektor enthalten.

Daher bilden nur die Ursprungsgeraden $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ Unterräume.

d) Verallgemeinerung von (c):

In einem K-Vektorraum V bilden die Mengen $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ Unterräume.

Das letzte Beispiel läßt sich noch weiter verallgemeinern:

34.8. Def.: Sei V ein K-Vektorraum. Ferner seien $u_1, \dots, u_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Dann nennt man $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ eine <u>Linearkombination</u> von $u_1, \dots, u_n$.

Die Menge aller Linearkombinationen bildet das <u>Erzeugnis</u> $\text{span}(u_1, \dots, u_n)$, und man nennt $\{u_1, \dots, u_n\}$ das <u>Erzeugendensystem</u> von $\text{span}(u_1, \dots, u_n)$.

34.9. Satz (Erzeugnis als Unterraum)

Sei V ein K-Vektorraum und seien $u_1, \dots, u_n \in V$.
Dann bildet $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$ einen Unterraum von V.

Beweis: Wir wenden das Unterraumkriterium an:

a) Seien $v, w \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \,, \quad w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$$

$$\Rightarrow v + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \underset{34.2.e}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{\in K} u_i \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n).$$

b) Sei $\mu \in K$ und $u \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

$$\Rightarrow \mu u = \mu \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i}_{\in V} \underset{34.2.d}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu (\lambda_i u_i)$$

$$\underset{34.2.b}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\mu \lambda_i)}_{\in K} u_i \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n). \qquad \square$$

34.10. Beispiel

Im $\mathbb{R}^3$ bildet die Menge aller Ebenen durch den Ursprung einen Unterraum.

34.11. Lineare Abhängigkeit

Offenbar ist $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$,
d.h. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ läßt sich als Linearkombination von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ darstellen.

Def.: Ein Vektor u heißt <u>linear abhängig</u> von $v_1, \dots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Eine Menge von Vektoren $u_1, \dots, u_n$, bei denen sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken läßt, heißt <u>linear unabhängig</u>.

Gibt es ein einfaches Kriterium, mit dem man lineare Unabhängigkeit nachweisen kann?

34.17. Satz (<u>Kriterium für lineare Unabhängigkeit</u>)

Sei V ein K-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jede Linearkombination mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}$ gilt:
$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

<u>Beweis:</u>

„$\Leftarrow$": Seien $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, d.h. es gibt ein v_k mit $v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i$

Setze $\lambda_k := -1$. $\Rightarrow$ $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

„$\Rightarrow$": Ann.: Es gibt eine Linearkomb., in der ein $\lambda_k \neq 0$ ex. und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}$ gilt.

$$\Rightarrow -\lambda_k v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \underbrace{\frac{\lambda_i}{-\lambda_k}}_{\in K} v_i \Rightarrow v_k \text{ ist linear abhängig von } \{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\}.$$

$\square$

Macht lineare Unabhängigkeit auch bei unendlich vielen Vektoren Sinn?

34.13. Def.:

Ein unendliches System B von Vektoren heißt <u>linear unabhängig</u>, wenn jede endliche Auswahl von Vektoren aus B linear unabhängig ist.

34.14. <u>Beispiel</u>

Betrachte $\mathbb{R}[x]$, d.h. die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Nach 34.4.(g) bildet $\mathbb{R}[x]$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wir zeigen, dass das unendl. System $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}[x]$ ist.

Ang., dies trifft nicht zu. Dann ex. endl. Teilmenge $\{x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_n}\} \subset B$, die linear abhängig ist.

$\Rightarrow$ Es gibt eine Linearkomb.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{m_i} = 0 \qquad (*)$$

mit einem $\lambda_k \neq 0$.

Auf der linken Seite von $(*)$ steht ein Polynom, das nur endl. viele Nullstellen hat, rechts steht das Nullpolynom mit unendl. vielen Nullstellen. ↯ $\square$

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit erlaubt uns, ein minimales Erzeugendensystem zu finden.

34.15. Def.:

Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt <u>Basis</u> von V, falls gilt:

a) $\text{span}(B) = V$

b) B ist linear unabhängig.

34.16 <u>Beispiele</u>

a) $\left\{ \binom{2}{3}, \binom{3}{4} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$, denn

i) Sei $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen λ, μ mit

$$\lambda \binom{2}{3} + \mu \binom{3}{4} = \binom{x}{y}$$

Das Gleichungssystem

$$2\lambda + 3\mu = x$$
$$3\lambda + 4\mu = y$$

hat die Lösung $\lambda = -4x + 3y, \quad \mu = 3x - 2y.$ $\quad (*)$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{span}\left(\binom{2}{3}, \binom{3}{4} \right).$

ii) Sei $\lambda \binom{2}{3} + \mu \binom{3}{4} = \binom{0}{0}$

Mit $(*)$ folgt: $\lambda = -4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$\lambda = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \binom{2}{3}, \binom{3}{4}$ sind linear unabhängig.

b) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^n$,

die so genannte <u>Standardbasis</u>.

c) Es gibt auch Vektorräume mit unendlichen Basen. Beispielsweise ist $\{1, x, x^2, \ldots\}$ eine unendliche Basis des $\mathbb{R}[x]$:

i) $\{1, x, x^2, \ldots\}$ ist lin. unabh. nach 34.14.

ii) Jedes Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ ist als Lin.-Komb. von Elementen aus $\{1, x, x^2, \ldots\}$ darstellbar.

Hat jeder Vektorraum eine Basis? Man kann zeigen:

34.17 Satz (<u>Existenz von Basen</u>)

Jeder Vektorraum $V \neq \{\vec{0}\}$ hat eine Basis.

Offenbar sind Basen nicht eindeutig: So sind z.B. $\{\binom{2}{3}, \binom{3}{4}\}$ und $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ Basen des $\mathbb{R}^2$.

Insbesondere kann man Basisvektoren austauschen:

34.18 Satz (<u>Austauschsatz</u>)

Sei V ein Vektorraum mit einer endlichen Basis $\{b_1, \ldots, b_n\} =: B$. Ferner sei $v \in V$ und $v \neq 0$. Dann ex. ein b_k, so dass $\{b_1, \ldots, b_{k-1}, v, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V ist.

<u>Beweis:</u> Da B Basis. $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i . \qquad (*)$$

Da $v \neq 0$, ist mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Sei o.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$.

Wir zeigen, dass dann $\{v, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ eine Basis von V ist.

i) $\operatorname{span}(v, b_2, \dots, b_n) = V$, denn:

Sei $u \in V$. Da B Basis ist, ex. $\mu_1, \dots, \mu_n$ mit

$$u = \sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k . \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $\lambda_1 \neq 0$ folgt: $b_1 = \frac{1}{\lambda_1} v - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} b_i$.

Einsetzen in $(**)$ zeigt, dass u als Linearkomb. von $v, b_2, \dots, b_n$ geschrieben werden kann.

ii) $v, b_2, \dots, b_n$ ist linear unabhängig, denn:

Sei $\mu_1 v + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n = 0$

Mit $(*)$:
$$0 = \mu_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i b_i$$
$$= \mu_1 \lambda_1 b_1 + \sum_{i=2}^{n} (\mu_1 \lambda_i + \mu_i)$$

Da $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis, sind alle Koeff. 0:

$$\mu_1 \lambda_1 = 0 \quad \xRightarrow{\lambda_1 \neq 0} \quad \mu_1 = 0$$

$$\mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0 \quad \xRightarrow{\mu_1 = 0} \quad \mu_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n)$$
$(i = 2, \dots, n)$

$\square$

Hat ein Vektorraum eine eindeutige Zahl an Basisvektoren?

34.20 Satz (Eindeutigkeit der Zahl von Basisvektoren)

Hat ein Vektorraum V eine endliche Basis von n Vektoren, so hat jede Basis von V ebenfalls n Vektoren.

Beweis:

Seien $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ Basen.

i) Ann.: $n > m$.
Tausche m der Vektoren aus B durch C aus.
Da C eine Basis ist, sind die nicht ausgetauschten Vektoren aus B als Lin.-Komb. von $c_1, \dots, c_m$ darstellbar. Dies widerspricht der Basiseigenschaft.

ii) Ann.: $n < m$.
Widerspruch wird analog konstruiert. $\square$

Satz 34.20 motiviert

34.21. Def.: Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Dann heißt die Zahl $n =: \dim V$ die Dimension von V. Der Nullraum $\{\vec{0}\}$ habe die Dimension 0.

Man kann zeigen:

34.22. Satz (Basiskriterium linear unabhängiger Mengen)

In einem Vektorraum der Dimension n ist jede linear unabhängige Menge von n Vektoren eine Basis.

Bem.: Insbesondere gibt es in einem n-dimensionalen Vektorraum keine Basen mit $n-1$ oder $n+1$ Elementen. Dies würde Satz 34.20 widersprechen.