§ 33: MEHRFACHINTEGRALE

33.1. Motivation

Funktionen können auch von mehreren Variablen abhängen.

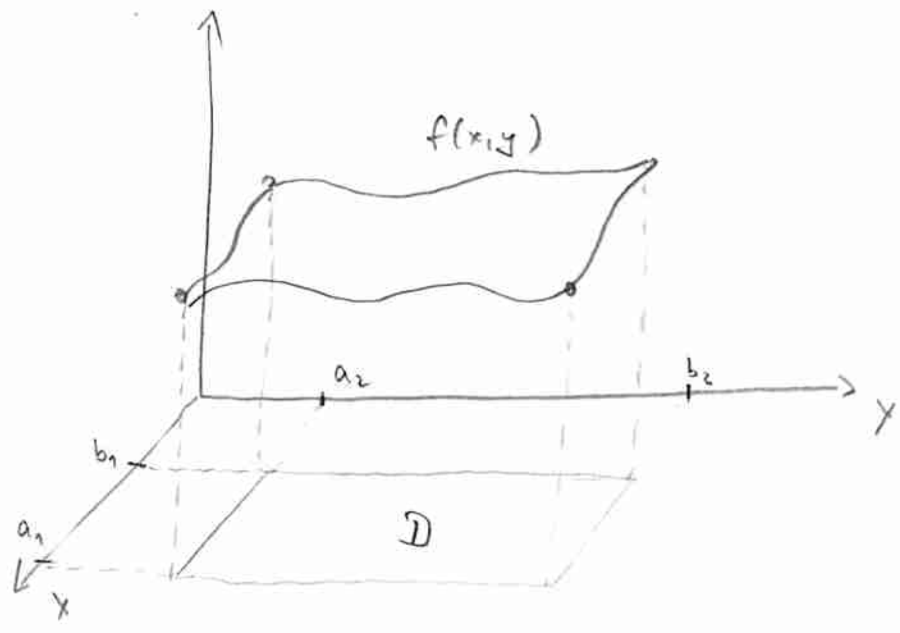
Beispiel: $f(x,y) = x^2 - 3y$

Lassen sich für solche Funktionen Begriffe wie das Integral sinnvoll definieren?

Wir beschränken uns zunächst auf Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit einem rechteckigen Definitionsbereich

$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Ziel ist die Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von f:



33.2. Definition

a) $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ heißt Zerlegung des Rechtecks $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

$\mathfrak{Z}(D)$ ist die Menge der Zerlegungen von D und

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

die Feinheit einer Zerlegung $Z \in \mathfrak{Z}(D)$.

b) Zu einer Zerlegung Z heißen die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader von Z, und

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

ist der Flächeninhalt von Q_{ij}.

c) $$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{x \in Q_{ij}} (f(x)) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{x \in Q_{ij}} (f(x)) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

heißen Riemann'sche Unter- bzw. Obersumme der Funktion f zur Zerlegung Z.

Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ des jeweiligen Teilquaders heißt

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(x_{ij}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemann'sche Summe zur Zerlegung Z.

33.3. Bemerkungen

Analog zu Bem. 28.4 gelten folgende Aussagen:

a) Die Riemann-Summe liegt zwischen Unter- und Obersumme:

$$U_f(Z) \le R_f(Z) \le O_f(Z)$$

b) Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zerlegungspunkte x_i und/oder y_j, so gilt:

$$U_f(Z_2) \ge U_f(Z_1)$$
$$O_f(Z_2) \le O_f(Z_1)$$

c) Für beliebige Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}(D)$ gilt stets:

$$U_f(Z_1) \le O_f(Z_2)$$

Kann man mit diesen Unter-, Ober- und Riemann-Summen ein Integral definieren?

33.4. Definition

a) Existieren die Grenzwerte

$$\underline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy := \sup\{U_f(Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(D)\},$$

$$\overline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy := \inf\{O_f(Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}(D)\},$$

so heißen sie (Riemann'sches) <u>Unter- bzw. Oberintegral</u> von f über D.

b) $f(x,y)$ heißt <u>(Riemann-) integrierbar</u> über D, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \underline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy$$

das <u>(Riemann-) Integral</u> von $f(x,y)$ über D.

Ähnlich wie im 1D-Fall zeigt man

33.5. Satz (<u>Eigenschaften des Doppelintegrals</u>)

a) <u>Linearität</u>

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

b) <u>Monotonie</u>

Gilt $f(x,y) \leq g(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$, so folgt

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

c) <u>Nichtnegativität</u>

$$f(x,y) \geq 0 \quad \forall\, (x,y) \in D \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \geq 0.$$

d) <u>Zusammensetzung von Integrationsintervallen</u>

Sind D_1, D_2 und D Rechtecke mit $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(x,y)$ genau dann über D integrierbar, falls $f(x,y)$ über D_1 und über D_2 integrierbar ist. Dann gilt:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

e) <u>Riemann-Kriterium</u>

$f(x,y)$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, Z \in \mathfrak{Z}(D): \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Schön wäre es, wenn sich die Berechnung von Doppelintegralen auf die Integration von Funktionen einer Variablen zurückführen ließe. Dass dies möglich ist, besagt

33.6 Satz (Satz von Fubini)

Sei $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ integrierbar und existieren die Integrale

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \qquad \text{bzw.} \qquad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. $y \in [a_2, b_2]$, so gilt:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \right) dx \qquad \text{bzw.}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy .$$

Beweis:

Sei $Z = \{(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung von D.

Für beliebige $y \in [y_j, y_{j+1}]$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ gilt dann

$$\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \le f(\xi_i, y) \le \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)$$

Integration bzgl. y liefert

$$\inf_{Q_{ij}} (f(x,y))\, (y_{j+1} - y_j) \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy \le \sup_{Q_{ij}} (f(x,y))\, (y_{j+1} - y_j)$$

Multiplikation mit $(x_{j+1} - x_i)$ und Summation über i, j ergibt

$$U_f(Z) \le \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y)\, dy \right) (x_{i+1} - x_i) \le O_f(Z)$$

Das ist eine Abschätzung für eine bel. Riemann-Summe von $F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$ zur Zerlegung $Z_x = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a_1, b_1]$.

Insbes. folgt hieraus

$$U_f(Z) \leq U_f(Z_x) \leq O_f(Z_x) \leq O_f(Z).$$

Für $\|Z\| \to 0$ erhält man die Beh. $\square$.

33.7. Beispiel

Sei $D = [0,1] \times [0,2]$ und $f(x,y) = 2 - xy$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (2-xy)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left[2x - \tfrac{1}{2}x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \tfrac{1}{2}y \right) dy = \left[2y - \tfrac{1}{4}y^2 \right]_0^2 = 3.$$

33.8. Bemerkungen

a) Das Doppelintegral $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ beschreibt das Volumen zwischen dem Graphen von $f(x,y)$ und der x-y-Ebene.

b) Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich auf Dreifachintegrale usw. verallgemeinern.