§32 KURVEN UND BOGENLÄNGE

32.1 Motivation:

Der Begriff der Kurve in der Ebene oder im Raum spielt in den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, Technik (Robotik) und Informatik (Computergrafik) eine tragende Rolle.
Neben der Berechnung von Flächen und Volumina ist die Definition / Ermittlung der Länge von Kurven eine weitere wichtige Anwendung der Integralrechnung.

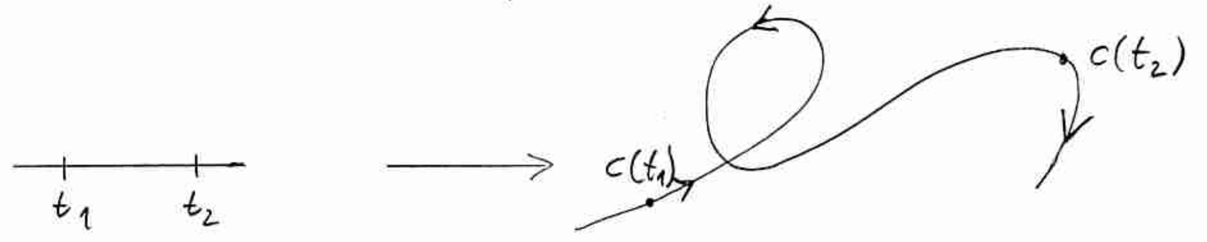
32.2 Definition:

Eine (parametrisierte) Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$c : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\quad t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))^T := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

deren Komponentenfunktionen $x_1, \dots, x_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind.
c heißt differenzierbar (stetig differenzierbar, C^1-Kurve), wenn alle x_i differenzierbar (stetig differenzierbar) sind.
Man definiert $\dot{c}(t) := \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right)^T$.

Das Bild $c([a,b])$ heißt Spur von c.



"Bewegung eines Punktes im Raum, $c(t)$ als Ort des Pkt. zur Zeit t."

32.3 Beispiele:

a) Ellipse mit Hauptachsen a und b:

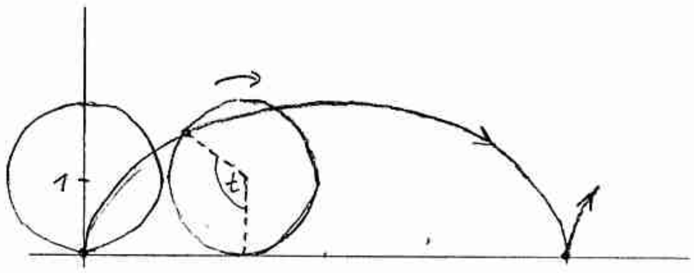
$x(t) = a \cdot \cos t$

$y(t) = b \cdot \sin t$

aus $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt die Spurgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) Zykloide



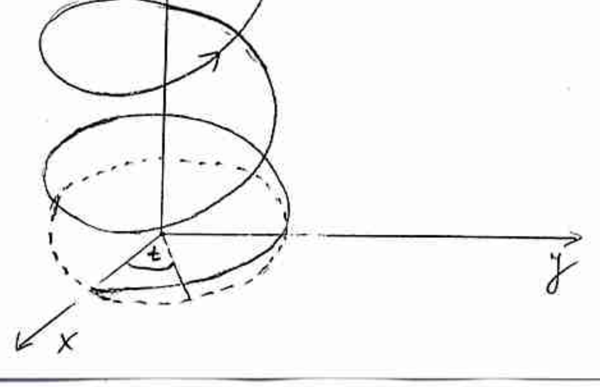
Kurve eines Randpunktes eines Kreises, der auf einer Geraden abrollt.

$x(t) = t - \sin(t)$

$y(t) = 1 - \cos(t)$

Überlagerung der Mittelpunktsbewegung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ und einer Kreisbewegung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$ im Uhrzeigersinn.

c) Schraubenlinie



$c(t) = (r \cdot \cos t,\ r \cdot \sin t,\ h \cdot t)^T,$

$t \in \mathbb{R}.$

Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der x-y-Ebene und einer linearen Bewegung in z-Richtung.

32.4. Definition:

Ist $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die „neue" Kurve $\tilde{\gamma}(\tau) := c(h(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ die selbe Spur und den selben Durchlaufsinn wie c. Man nennt $t = h(\tau)$ einen Parameterwechsel (oder Umparametrisierung).

Kurven, die durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.

Ist c stetig differenzierbar, so werden nur stetig differenzierbare Funktionen $h: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ mit $h'(\tau) > 0$ als Parameterwechsel zugelassen (C^1-Parameterwechsel).

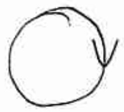
32.5 Bemerkung:

Verschiedene Kurvenparametrisierungen können zur selben Spur führen:

$$c_1(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

und

$$c_2(t) := (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$



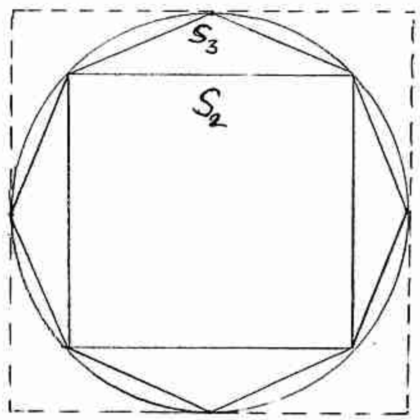
haben den Einheitskreis als Spur, unterscheiden sich aber im Durchlaufsinn.

Bogenlänge einer Kurve

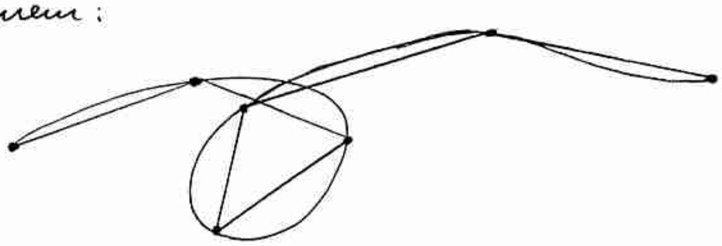
wichtige Anwendung der Integralrechnung auf Kurven.

Motivierendes Beispiel: Kreisumfang

Approximiere Kreis durch einbeschriebene regelmäßige 2^n-Ecke ($n \geq 2$). Ihre Umfänge S_n wachsen monoton in n und sind z. B. durch den Umfang eines umbeschriebenen Quadrats nach oben beschränkt.
Somit existiert $\sup_n (S_n)$.
Es definiert den Kreisumfang.



Allgemein:



Approximiere die Kurve $c(t)$ durch einen Polygonzug.
Für eine Zerlegung $Z = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \}$ von $[a, b]$ ist seine Länge gegeben durch

$$L(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} | c(t_{i+1}) - c(t_i) | .$$

Dabei bezeichnet $|(x_1, \ldots, x_n)^T| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ die euklidische Norm eines Vektors $(x_1, \ldots, x_n)^T$.

32.6 Definition:

Es bezeichne $\mathfrak{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$. Ist die Menge $\{L(Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}[a,b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c rektifizierbar, und

$$L(c) := \sup \{L(Z) \mid Z \in \mathfrak{Z}[a,b]\}$$

heißt die Länge der Kurve c.

32.7 Satz (Länge von C^1-Kurven):

Jede C^1 Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar, und es gilt

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt .$$

Beweis: Für eine Zerlegung Z gilt:

$$L(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} | c(t_{i+1}) - c(t_i) |$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k(t_{i+1}) - x_k(t_i))^2} \qquad \text{Def. der euklid. Norm}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\dot{x}_k(\tau_{k_i})\right)^2}\, (t_{i+1} - t_i) \qquad \text{Mittelwertsatz}$$

mit $\tau_{k_i} \in [t_i, t_{i+1}]$.

Für die zu Z gehörende Rechtecksumme $R(Z)$ von $\int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt$ gilt:

$$R(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k(t_i))^2}\, (t_{i+1} - t_i)$$

Zur Abschätzung von $|L(Z) - R(Z)|$ verwenden wir die gleichmäßige Stetigkeit der $\dot{x}_k(t)$ auf dem Kompaktum $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ |\tilde{t} - t| < \delta \Rightarrow |\dot{x}_k(\tilde{t}) - \dot{x}_k(t)| < \varepsilon, \ k = 1, \dots, n.$$

Gilt nun für gegebenes $\varepsilon > 0$, dass die Feinheit $\|Z\|$ der Zerlegung $\|Z\| < \delta$ erfüllt, so folgt damit

$$|L(Z)-R(Z)| = \left|\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k(\tau_{k_i})\right)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k(t_i)\right)^2}\right)(t_{i+1}-t_i)\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=0}^{m-1}\left|\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k(\tau_{k_i})\right)^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k(t_i)\right)^2}\right| \cdot (t_{i+1}-t_i)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\dot{x}_k(\tau_{k_i}) - \dot{x}_k(t_i)\right)^2}\;(t_{i+1}-t_i)$$

(denn man zeigt für die eukl. Norm: $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$)

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^2}}_{=\sqrt{n}\cdot\varepsilon}\;(t_{i+1}-t_i) = \sqrt{n}\,\varepsilon\,(b-a) \longrightarrow 0$$

für $\varepsilon \to 0$.

$\square$

32.8 **Beispiel:**

Kreisumfang: $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos t \\ r\cdot\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$L(c) = \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)|\,dt$$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{c}(t)| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cdot\cos^2 t} = \sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)} = r$$

$$\Rightarrow L(c) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r. \qquad \text{stimmt}$$

Warum ist die Kurvenlänge wichtig?

32.9 Lemma Die Länge einer C^1-Kurve ist parametrisierungsinvariant.

Beweis: Mit einem C^1-Parameterwechsel $h: [\alpha, \beta] \longrightarrow [a,b]$ gilt aufgrund der Substitutionsregel

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta | \dot{c}(h(\tau)) \underbrace{h'(\tau)}_{>0} | \, d\tau \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \int_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} |\dot{c}(h(\tau))| \cdot \underbrace{h'(\tau)\, d\tau}_{dt}$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} |\dot{c}(t)| \, dt \qquad \text{(Substitutionsregel)}$$

$$= L(c). \qquad \square$$

32.10 Definition: Es sei $c: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve. Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t |\dot{c}(\tau)| \, d\tau \qquad t \in [a,b]$$

heißt Bogenlängenfunktion von c.

Bedeutung: Reparametrisiert man eine Kurve mit ihrer Bogenlänge (Bogenlängenparametrisierung), so vereinfachen sich viele Formeln.

32.11 Definition: Es sei $c: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve. Dann nennt man

$$\dot{c}(t) = \left(\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\right)^T$$

auch Tangentialvektor (Geschwindigkeitsvektor) der Kurve c an der Stelle t.

Für $\dot{c}(t) \neq 0$ heißt $T_c(t) := \dfrac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$ der Tangenteneinheitsvektor.

Bem.: Bei Bogenlängenparametrisierung (!) ist $|\dot{c}(s)| = 1$, d.h.

$T_c(s) = \dot{c}(s)$ ist bereits Tangenteneinheitsvektor.

Aus $$1 = |\dot{c}(s)|^2 = (\dot{x}_1(s))^2 + (\dot{x}_2(s))^2 + \ldots + (\dot{x}_n(s))^2$$

folgt durch Differentiation nach der Bogenlänge s:

$$0 = 2\dot{x}_1\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_2\ddot{x}_2 + \ldots + 2\dot{x}_n\ddot{x}_n = 2\left\langle \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Hierbei beschreibt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.)

Somit steht bei Bogenlängenparametrisierung der Beschleunigungsvektor $\ddot{c}(s) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(s) \\ \ddot{y}(s) \end{pmatrix}$ senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(s)$.

Man bezeichnet
$$N(s) := \frac{\ddot{c}(s)}{|\ddot{c}(s)|}$$

als Hauptnormalenvektor von c, und $\varkappa(s) := |\ddot{c}(s)|$ als Krümmung von c.

32.12 Beispiel Krümmung eines Kreises mit Radius r

Kreis in Bogenlängenparametrisierung:

$$x(s) = m_1 + r\cos\frac{s}{r}$$
$$y(s) = m_2 + r\sin\frac{s}{r}$$

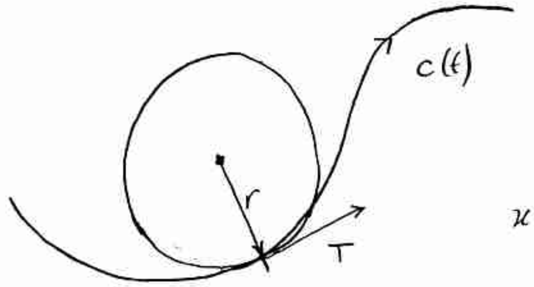
$$\dot{x}(s) = -\sin\frac{s}{r}$$
$$\dot{y}(s) = \cos\frac{s}{r}$$

$$\ddot{x}(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}$$
$$\ddot{y}(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}$$

$$\varkappa = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}$$

Bem.: Allgemein gilt:

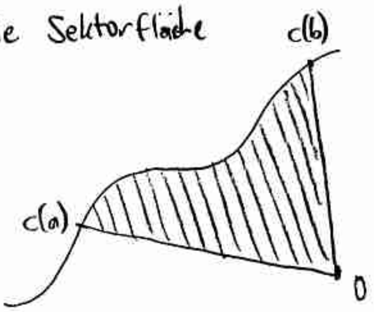
Die Krümmung gibt den reziproken Radius des Kreises an, der sich an der Stelle t an die Kurve $c(t)$ anschmiegt (Schmiegkreis, auch Krümmungskreis)



$\varkappa = \frac{1}{r}$

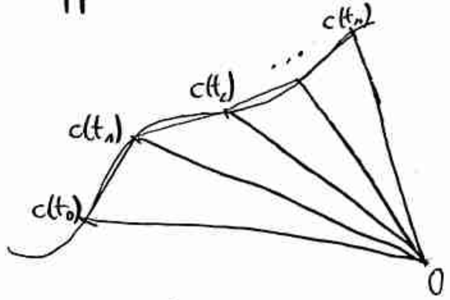
Der Schmiegkreis besitzt dieselbe Tangente und dieselbe Krümmung wie die Kurve.

32.13 Die Sektorfläche



Ziel: Bestimmung des Flächeninhalts, den der Fahrstrahl von 0 nach $c(t)$ für $t \in [a,b]$ überstreicht.

Methode: approximierende Dreiecksflächen



Zerlegung

$$Z = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

Man kann zeigen (z.B. aus dem Schulunterricht bekannt):

Die Fläche des durch die Eckpunkte 0, $c(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $c(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ festgelegten Dreiecks beträgt

$$\frac{1}{2} |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i| \quad \left(= \frac{1}{2} |c(t_i) \times c(t_{i+1})| \right)$$

[Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$, dritte Koord. wird 0 gesetzt]

Die Gesamtfläche beträgt daher

$$A(Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i),$$

geeignete Orientierung der Dreiecke vorausgesetzt (sodass Beträge entfallen können).
Deswegen wird im Folgenden ein orientierter Flächeninhalt eingeführt.

32.14 Definition:

Der Fahrstrahl an die Kurve $c: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(c)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| \leq \delta$ gilt

$$|A(Z) - F(c)| \leq \varepsilon.$$

32.15 Satz (Sektorformel von LEIBNIZ):

Sei $c: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Ortsvektor $c(t)$ im Zeitintervall $t \in [a,b]$ die Fläche

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt.$$

Beweis: Ähnlich zum Beweis von Satz 32.7.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es in (t_i, t_{i+1}) Stellen τ_i und $\tilde{\tau}_i$ mit

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \dot{x}(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \\ y_{i+1} - y_i &= \dot{y}(\tilde{\tau}_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}\right\} (*)$$

Somit gilt für die Summen der Dreiecksflächen

$$\begin{aligned} A(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\underbrace{x_i y_{i+1} - x_i y_i}_{x_i(y_{i+1} - y_i)} + \underbrace{x_i y_i - x_{i+1} y_i}_{-y_i(x_{i+1} - x_i)}) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \dot{y}(\tilde{\tau}_i) - y_i \dot{x}(\tau_i))(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Wir vergleichen $A(Z)$ mit der Riemann-Summe

$$R(Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so gewählt, dass gilt:

(i) Für jede Zerlegung Z mit $\|Z\| \leq \delta$ ist

$$\left| R(Z) - \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \right| \leq \varepsilon$$

(ii) Für alle Paare $t, s \in [a,b]$ mit $|t - s| \leq \delta$ ist

$$\left.\begin{aligned} |\dot{x}(t) - \dot{x}(s)| &\leq \varepsilon \\ |\dot{y}(t) - \dot{y}(s)| &\leq \varepsilon \end{aligned}\right\} \text{Stetigkeit von } \dot{x}, \dot{y}$$

Es sei Z Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| \le \delta$. Ferner sei M obere Schranke für $|x(t)|$ und $|y(t)|$ auf $[a,b]$. Dann gilt

$$|A(Z)-R(Z)| \le \frac{M}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \Big(|\dot y(\tilde\tau_i) - \dot y_i| + |\dot x(\tau_i) - \dot x_i| \Big)(t_{i+1}-t_i)$$

$$\le \varepsilon M \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i) = \varepsilon M (b-a).$$

Zusammen mit (i) ergibt sich

$$\left| A(Z) - \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot y - y\dot x)\,dt \right| \le |A(Z)-R(Z)| + \left| R(Z) - \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot y - y\dot x)\,dt \right|$$

$$\le \varepsilon \big(M(b-a) + 1 \big) \longrightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Nach Def. 32.14 folgt hieraus die Behauptung. $\square$

32.16 Beispiele:

a) Der Fahrstrahl an den orientierten Kreisbogen

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t \qquad t \in [0,\varphi]$$

überstreicht die orientierte Fläche

$$\frac{1}{2}\int_0^\varphi (x\dot y - y\dot x)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\varphi (r\cos t \cdot r\cos t + r\sin t \; r\sin t)\,dt = \frac{r^2}{2}\varphi$$

Für $\varphi = 2\pi$ ergibt sich die Kreisfläche πr^2.

b) Der Fahrstrahl an den Zykloidenbogen

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

überstreicht die (orientierte) Fläche

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((t-\sin t)\sin t - (1-\cos t)^2 \big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t \; dt$$

$$= \frac{1}{2}\big[-t\cos t\big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\cos t - 2 \; dt = \frac{1}{2}\big[-t\cos t + 3\sin t - 2t\big]_0^{2\pi} = -3\pi.$$