§31 NUMERISCHE VERFAHREN ZUR INTEGRATION

31.1 Motivation:

Die wenigsten Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ lassen sich mit Hilfe von Stammfunktionen analytisch berechnen. Man ist deswegen auf numerische Verfahren, sogenannte Quadraturverfahren angewiesen.

Gesucht: $I[f] := \int_a^b f(x)\,dx$ für Funktion $f(x)$, die auf $[a,b]$ hinreichend oft differenzierbar ist.

Quadraturformeln führen dieses Integral in eine Summe über:

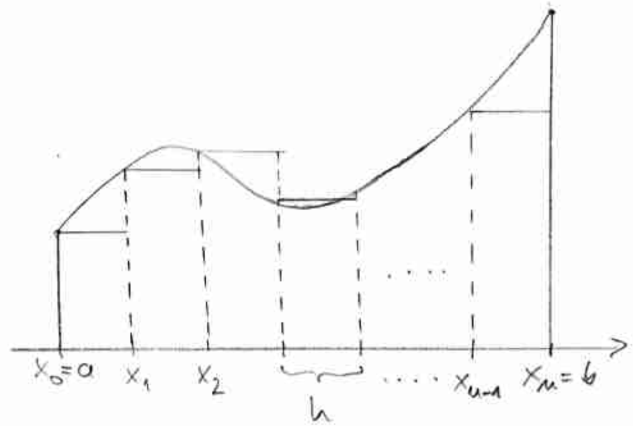
$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i): \qquad \text{Quadraturformel}$$

$x_i \in [a,b]$, $\quad i = 0,\dots,n$: Knoten

w_i, $\quad i = 0,\dots,n$: Gewichte

Praktisch brauchbar sind nur Quadraturformeln mit nichtnegativen Gewichten. Sie garantieren Nichtnegativität der Integralapproximation für nichtnegative Integranden, sowie gutartiges Verhalten gegenüber Rundungsfehlern.

31.2 Einfachstes Beispiel: Rechteckregel



$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0,\dots,n$, Knoten

$h = \frac{b-a}{n}$, Gitterweite

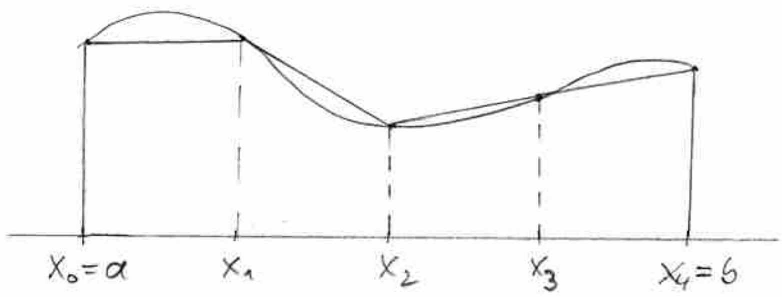
$$R_h[f] := \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_i)$$

I.A. ist die Rechteckregel nicht sehr genau, solange man nicht sehr viele Knoten verwendet.

Grund: $f(x)$ wird im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch die Konstante $f(x_i)$ approximiert.

31.3 Zweiteinfachstes Beispiel: Trapezregel

Idee: Approximiere $f(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$ durch Gerade durch Punkte $(x_i, f(x_i))$ und $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.



Fläche aller Trapeze:

$$T_h[f] := \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$= \frac{h}{2} f(x_0) + h\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right) + \frac{h}{2} f(x_n)$$

31.4 Bemerkung:

Genauere Quadraturformeln erhält man, indem $f(x)$ stückweise durch Polynome höheren Grades ersetzt wird ($\rightarrow$ Newton-Cotes-Formeln). Für zu grosse Grade treten allerdings negative Gewichte auf und die Formeln werden unbrauchbar.

Gewichte der Newton-Cotes-Formeln

Polynomgrad	Gewichte pro Intervall	Name
0	1	Rechteckregel
1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	Trapezregel
2	$\frac{1}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{6}$	Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$-Regel
4	$\frac{7}{90}$ $\frac{32}{90}$ $\frac{12}{90}$ $\frac{32}{90}$ $\frac{7}{90}$	Milne-Regel

Die Newton-Cotes Formel vom Grad n integriert Polynome vom Grad $\leq n$ exakt.

Gibt es bessere Alternativen zur Erhöhung der Genauigkeit?

Antwort: Romberg-Quadratur

Idee: Fehlerterme in der Trapezregel sukzessive wegextrapolieren.

Es gilt (Beweis aufwändig):

31.5 **Satz:** (Euler-Maclaurinsche Summenformel)

Für $f \in C^\infty[a,b]$ besitzt die Trapezregel die asymptotische Fehlerentwicklung

$$T_h[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots$$

mit Konstanten c_k, die von $f^{(2k-1)}(a)$ und $f^{(2k-1)}(b)$ abhängen.

Konsequenz:

$$T_h[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 h^2 + c_2 h^2 + O(h^6)$$

$$T_{\frac{h}{2}}[f] = \int_a^b f(x)\,dx + c_1 \frac{h^2}{4} + c_2 \frac{h^4}{16} + O(h^6)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\, T_{\frac{h}{2}}[f] - T_h[f]}{3} = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{4} c_2 h^4 + O(h^6)$$

Quadratischer Fehlerterm in h wurde wegextrapoliert.

Ebenso kann man mit $T_h[f]$, $T_{\frac{h}{2}}[f]$, $T_{h/4}[f]$ die h^4-Terme eliminieren und erhält ein Verfahren 6. Ordnung!

31.6 Satz: (Romberg Quadratur)

Es sei $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $T_h[f]$ die Trapezapproximation an $\int_a^b f(x)\,dx$ mit Schrittweite h.

Dann erhält man mit der Rekursionsformel

$$P_{k0} := T_{h/2^k}[f], \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$P_{kj} := \frac{4^j \cdot P_{k\,j-1} - P_{k-1\,j-1}}{4^j - 1}, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, m$$

in P_{mm} eine Quadraturformel der Fehlerordnung $2m+2$.

Beweis: Übungsaufgabe (vollst. Ind.)

Veranschaulichung durch Schema

$$\begin{tikzcd}
T_h = P_{00} \arrow[dr, "-\frac{1}{3}"] & & & \\
T_{h/2} = P_{10} \arrow[r, "4/3"] \arrow[dr, "-\frac{1}{3}"] & P_{11} \arrow[dr, "-\frac{1}{15}"] & & \\
T_{h/4} = P_{20} \arrow[r, "4/3"] \arrow[dr, "-\frac{1}{3}"] & P_{21} \arrow[r, "16/15"] \arrow[dr, "-\frac{1}{15}"] & P_{22} \arrow[dr, "-\frac{1}{63}"] & \\
T_{h/8} = P_{30} \arrow[r, "4/3"] & P_{31} \arrow[r, "16/15"] & P_{32} \arrow[r, "64/63"] & P_{33}
\end{tikzcd}$$

Fehlerordnung: 2	4	6	8

Verfahrensmerkmale:

- schrittweise Intervallhalbierung
- Werte aus vorangegangenen Schritten werden weiter verwendet
- Abbruch der Verfeinerung, falls Approximationen hinreichend dicht beieinander.

31.7 Beispiel: $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$

h	$T_h[f]$	Romberg-Quadr.	# Funktionsauswertungen
1	0.92073 54924	0.92073 54924	2
1/2	0.93979 32848	0.94614 58823	3
1/4	0.94451 35217	0.94608 30041	5
1/8	0.94569 08636	0.94608 30704	9
1/16	0.94598 50299	0.94608 30704	17
⋮	⋮		
$\frac{1}{32768}$	0.94608 30703		32769

Fazit: Die Romberg Quadratur hat den Aufwand gegenüber der Trapezregel um den Faktor 2000 reduziert, bei vergleichbarer Genauigkeit!