§ 30. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

30.1. Motivation

Manchmal muss man auch Integrale berechnen

- bei denen über ein unendliches Intervall integriert wird.

  Bsp.: $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

- bei denen unbeschränkte Funktionen vorliegen.

  Bsp.: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solche Integrale heißen unneigentliche Integrale.
Unter welchen Bedingungen ist deren Berechnung möglich?

Unendliche Integrationsgrenzen

30.2. Def.: Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a,R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar.

Falls $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$ ex., heißt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ für $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Ferner setzt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

30.3. Beispiele

a) Konvergiert $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ für $s > 1$?

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{R^{s-1}}\right)$$

Mit $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{s-1}} = 0$ folgt die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ für $s>1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

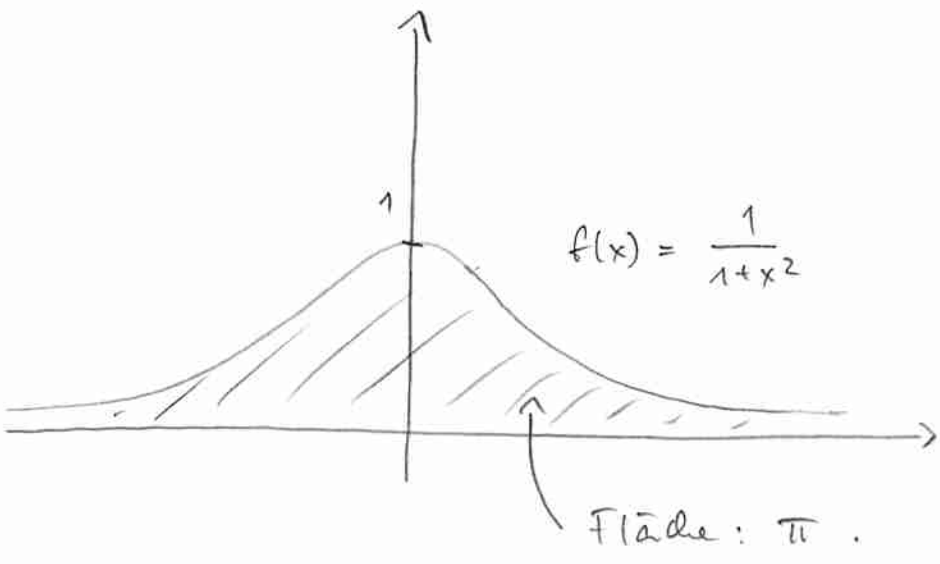
Bem.: Für $s \le 1$ ist $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergent.

b) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_{-R}^0 + \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_0^R$$

$$= 0 - \lim_{R\to\infty} \arctan(-R) + \lim_{R\to\infty} \arctan R - 0$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$



Integration unbeschränkter Funktionen

Wie geht man vor, wenn der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist (z.B. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$)?

30.4. Def.: Sei $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b-a$ integrierbar und in a nicht definiert.

Falls $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent, und man setzt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx .$$

Eine analoge Definition gilt, falls $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ in b nicht definiert ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

Falls $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ in a und b nicht definiert ist, setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$

mit $c \in (a,b)$.

30.5. Beispiel

Konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ für $0 < s < 1$?

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} x^{1-s} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \varepsilon^{1-s}\right)$$

$$\to \frac{1}{1-s} \quad \text{für } \varepsilon \to 0. \qquad \text{Konvergent.}$$

Bem.: $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert nicht für $s \geq 1$:

$$s = 1: \quad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln \varepsilon \to \infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

$$s > 1: \quad \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{s-1}} - 1\right)$$

$$\to \infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

30.6. Bemerkung

Falls Polstellen im Innern des Integrationsbereichs vorliegen, spaltet man das Integral so in Teilintegrale auf, dass die Polstellen an den Grenzen der Teilintegrale liegen.

Für uneigentliche Integrale kann man ähnliche Konvergenzkriterien wie für Reihen zeigen (vgl. § 16):

30.7. Satz (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale)

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[a,b]$. Dann gilt:

a) Cauchy-Kriterium

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > a: \quad \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 > C.$$

b) Absolute Konvergenz

Ist $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent (d.h. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist absolut konvergent), so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

c) Majorantenkriterium

Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,\infty)$ und konvergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut.

Gilt umgekehrt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Bem.: Entsprechende Aussagen gelten auch beim nach unten unbeschränkten Integrationsintervall $(-\infty, b]$, sowie an Singularitäten an den Enden eines beschränkten Intervalls $[a,b]$.

30.8. Beispiel: Das Dirichlet-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

Cauchy-Kriterium ergibt für $0 < z_1 < z_2$:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{part.} \\ \text{Int.}}}{=} -\frac{\cos x}{x}\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx}{x^2}$$

$\rightarrow 0$ für $z_1 \rightarrow \infty$

(da $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ nach 30.3.(a) konvergiert).

Das Dirichlet-Integral tritt z.B. in der Signalverarbeitung auf.

30.9. Beispiel: Die Gammafunktion (Euler, 1707-1783)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0.$$

Konvergiert dieses Integral?

Probleme:

a) Für $0 < x < 1$ divergiert der Integrand in $t=0$.

b) Obere Integrationsgrenze ist ∞.

Wir spalten daher auf:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$$

und behandeln beide Probleme getrennt:

a) Betrachte $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ für $0 < x < 1$:

Wegen $0 \le e^{-t} t^{x-1} \le t^{x-1}$ hat $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$

die nach 30.5 konvergente Majorante $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$.

b) Betrachte $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$.

Es ex. $c > 0$ mit $0 \le e^{-t} t^{x-1} \le \frac{c}{t^2}$, denn:

$c e^t \ge t^{x+1}$
(e-Funktion wächst schneller als jede Potenz)

Somit ist $\frac{c}{t^2}$ konvergente Majorante (vgl 30.3.(a)).

Also ex. $\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Zwei wichtige Eigenschaften der Gammafunktion:

i) $\boxed{\Gamma(1)} = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -0 + 1 = \boxed{1}$

ii) $\Gamma(x) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{u} \underbrace{t^{x-1}}_{v'} dt$

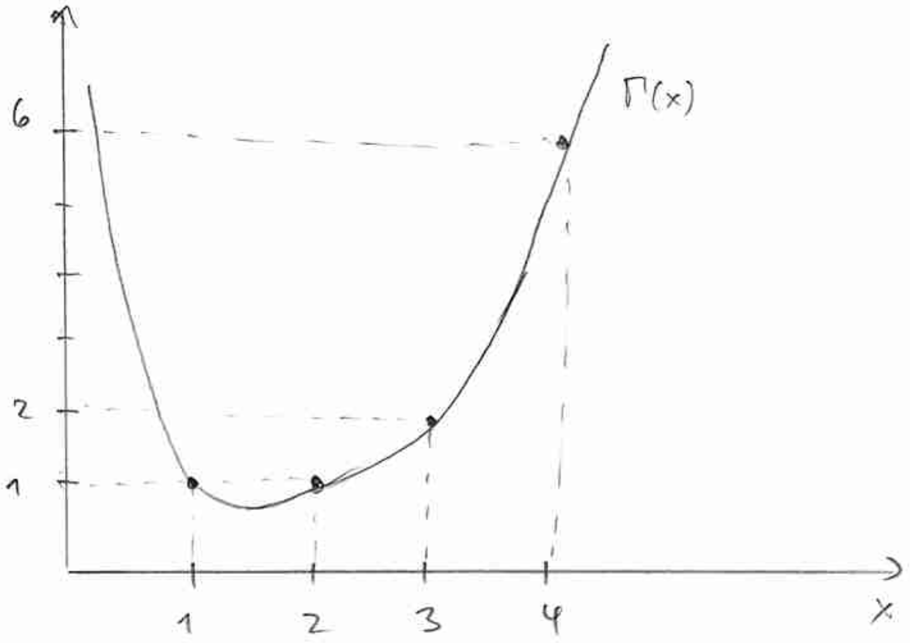
$= \underbrace{e^{-t} \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{0} + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dx$

$= \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$.

d.h. $\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$

Wegen (i) und (ii) interpoliert die Gammafunktion die Fakultät:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$


Γ(x)
6
2
1
1
2
3
4
x