§29: DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL UND DIE STAMMFUNKTION

29.1 Motivation

- Gibt es eine Operation, die die Differentiation „rückgängig" macht?
- Kann man zu einer gegebenen Funktion f eine Funktion F finden mit $F'(x) = f(x)$?

29.2 Def.:

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Ist F differenzierbar auf $[a,b]$ und gilt

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b],$$

so heißt $F(x)$ eine Stammfunktion von f.

Bem.: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ mit einer beliebigen Konstanten C Stammfunktion von $f(x)$.

Kommen wir nun zum Gipfel der Analysis:

29.3. Satz (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

a) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

("Integration als Umkehrung der Differentiation")

b) Ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, so gilt:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

("Stammfunktion als Mittel zum Lösen bestimmter Integrale").

Beweis:

a) Sei $h \neq 0$ ($h < 0$ ebenfalls zugelassen) so, dass $x, x+h \in [a,b]$.

$$\left| \frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{f(x)}_{\text{unabh. von } t}\,dt \right| \quad (\text{Def. von } F(x))$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right|$$

$$\leq \sup \big\{ |f(t) - f(x)| \;\big|\; t \text{ zwischen } x \text{ und } x+h \big\}$$

$\longrightarrow 0$ für $h \to 0$, da f stetig.

Somit ist $F'(x) = f(x)$.

b) Mit (a) gilt:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

Damit folgt:

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt .$$ □

29.4. Def.: Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ wird auch als „das" unbestimmte Integral von $f(x)$ bezeichnet und $\int f(x)\,dx$ geschrieben (d.h. ohne Integrationsgrenzen). Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt.

29.5. Beispiele von unbestimmten Integralen

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C \qquad (\cos x \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C \qquad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C \qquad (x > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \qquad (|x| \neq 1)$$

weitere Beispiele: Formelsammlungen, z.B.
Bronstein: Taschenbuch der Mathematik.

Unbekannte Integrale berechnet man durch (z.T. trickreiche) Umformung in bekannte Integrale.
Hierzu gibt es zwei Grundtechniken:

29.6. Satz (Integrationsregeln)

a) Partielle Integration:

Sind $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

und für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx .$$

b) Substitutionsregel:

Zur Berechnung von $\int_c^d f(x)\, dx$ setze man $x = g(t)$ mit g stetig differenzierbar, $g(a) = c$, $g(b) = d$ und formal: $dx = g'(t)\, dt$:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x)\, dx = \int_{t=a}^{t=b} f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

Beweis:

a) folgt aus der Produktregel der Differentiation:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b (uv)'\, dx}_{uv|_a^b} = \int_a^b u'v\, dx + \int_a^b v'u\, dx .$$

b) folgt aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\big(F(g(t))\big) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

nach Integration über t: im Bereich $[a,b]$.

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt = F(g(t))\Big|_a^b =$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx. \qquad \square$$

29.7. <u>Beispiele zur partiellen Integration</u>

a) $$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'}\, dx = x \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\, \underbrace{e^x}_{v}\, dx = x e^x - e^x + C$$

b) $$\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

c) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{u}\, \underbrace{\sin x}_{v'}\, dx$$

$$= \sin x \cdot (-\cos x) + \int \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx \qquad \Big| + \int \sin^2 x\, dx$$

$$2 \int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + \int dx$$

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C$$

29.8. Beispiele zur Substitutionsregel

a) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ Subst.: $z = \sqrt{x}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2z}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{z} \cdot 2z\,dz$$

$$\overset{29.7.a}{=} 2\left(z e^{z} - e^{z}\right) + C$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

b) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ Subst.: $x = \cos z$

$$\frac{dx}{dz} = -\sin z$$

$$\int_{x=-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{z=\pi}^{z=0} \sqrt{1-\cos^2 z}\cdot(-\sin z)\,dz$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \sin^2 z\,dz = \int_{0}^{\pi} \sin^2 z\,dz$$

$$\overset{29.7.c}{=} -\frac{1}{2}\sin z\cos z + \frac{1}{2}z\,\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= -0 + \frac{\pi}{2} - (-0+0) = \frac{\pi}{2}.$$

29.9. Bemerkung

Nicht alle Integrale lassen sich analytisch lösen, obwohl sie z.T. einfach aussehen. Beispiel:

„Fehlerfunktion" $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

in Formelsammlungen tabelliert bzw. numerisch approximierbar.

29.10. Integration rationaler Funktionen

Rückführung auf bekannte Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Wegen $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{x^2-5x+6}$$

Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \qquad | \cdot 3 \qquad (1) \\ -3A - 2B &= 1 \qquad\qquad\quad (2) \end{aligned}$$

Addition des 3-fachen von (1) zu (2) ergibt

$B = 1$

in (1): $A = -1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C \qquad x \neq 2,3$$