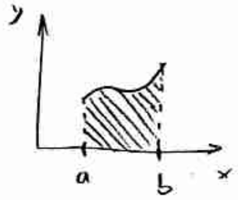
§ 28: Das bestimmte Integral

28.1 Motivation

Es sei $f(x)$, $x \in [a,b]$ eine reellwertige Funktion.

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse



Annahme: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt.

28.2 Definition

a) Eine Menge der Form

$$Z = \{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \}$$

heißt Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls $[a,b]$.

Die x_i heißen Knoten der Zerlegung.

b) $\|Z\| := \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$ heißt Feinheit der Zerlegung Z.

c) $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}[a,b]$: Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

d) Eine Zerlegung Z_1 ist eine feinere Zerlegung als Z_2 ($Z_1 \supset Z_2$, Verfeinerung), falls Z_1 durch Hinzunahme weiterer Knoten zu Z_2 entsteht.

28.3 Definition

a) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

heißt Riemann-Summe von f zur Zerlegung Z.

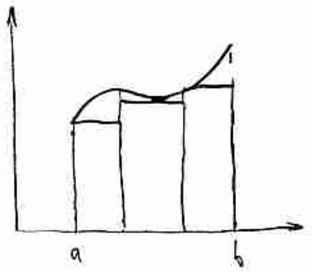
b) $$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

heißt Untersumme von f zur Zerlegung Z.

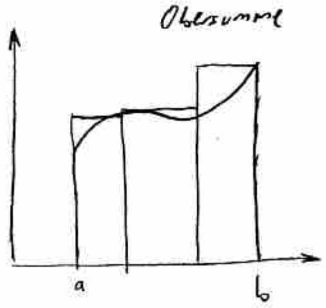
c) $$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

heißt Obersumme von f zur Zerlegung Z.

Untersumme



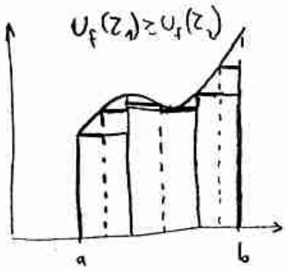
Obersumme

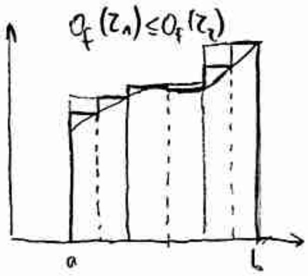


28.4 <u>Bem.:</u> a) Für jedes feste Z gilt $U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$

b) Verfeinerungen vergrößern Untersummen und verkleinern Obersummen:

$$Z_1 \supset Z_2 \Rightarrow \quad U_f(Z_1) \geq U_f(Z_2), \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$





c) Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

($U_f(Z_1)$ unterhalb, $O_f(Z_2)$ oberhalb der Kurve;
Untersummen nach oben beschränkt, Obersummen nach unten beschränkt)

28.5 <u>Definition</u>

a) Aufgrund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z \in \mathfrak{Z}[a,b]} U_f(Z)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \in \mathfrak{Z}[a,b]} O_f(Z).$$

Sie heißen <u>Riemannsches Ober-</u> bzw. <u>Unterintegral</u>.

b) $f(x)$ heißt <u>(Riemann-) integrierbar</u> über $[a,b]$, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

das <u>(Riemann-) Integral</u> von $f(x)$ über $[a,b]$.

28.6 Beispiele

a) Es sei $f(x) = c = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b-a)$$

D.h. $f(x)$ ist integrierbar mit $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

b) Es sei $\xi \in [a,b]$. Dann ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ 1 & (x = \xi) \end{cases}$$

integrierbar. Denn für jede Zerlegung Z gilt:

$$U_f(Z) = 0, \qquad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\| \qquad \text{(Begründung?)}$$

Also ist $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (da $\|Z\|$ beliebig klein gewählt werden kann)

c) Es sei
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}) \end{cases} \qquad \text{(Dirichlet'sche Sprungfunktion)}$$

Für jede Zerlegung Z ist

$$U_f(Z) = 0, \qquad O_f(Z) = 1.$$

Somit ist $f(x)$ <u>nicht</u> Riemann-integrierbar.

(Es gibt jedoch allgemeinere Integrierbarkeitsbegriffe – z.B. Lebesgue-Integral –, nach denen auch solche Funktionen integriert werden können.)

Eigenschaften des Riemann-Integrals

28.7 DEFINITION:

Ist $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative, Riemann-integrierbare Funktion, so wird die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

als Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Geraden $x=a$ und $x=b$ bezeichnet.

28.8 BEM.:

a) Ist f negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)|\,dx$ definieren.

b) Ist $b<a$, so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$.

28.9 Monotonie

LEMMA: Sind f und g integrierbar über $[a,b]$ mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx .$$

Beweis: Zu jeder vorgegebenen Zerlegung Z gilt $U_f(Z) \le U_g(Z)$, $O_f(Z) \le O_g(Z)$. Diese Ungleichungen übertragen sich auf Supremum (Unterintegral) bzw. Infimum (Oberintegral). $\square$

28.10 FOLGERUNG:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Beweis: Wg. Lemma 28.9 folgt aus $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ die Beziehung

$$-\int |f(x)|\,dx \le \int f(x)\,dx \le \int |f(x)|\,dx$$

und somit die Behauptung. $\square$

28.11 FOLGERUNG (Nichtnegativität)

Integration erhält die Nichtnegativität:

$$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 .$$

Beweis: Lemma 28.9 angewendet auf $f(x)$ und 0 ergibt

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0 .$$

$\square$

28.12 <u>Satz</u> (Linearität der Integration):

Es seien $f(x)$, $g(x)$ integrierbar über $[a,b]$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx .$$

<u>Beweis:</u> Aufgrund der Ungleichungen

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left(f(x) + g(x)\right) \leq \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) + \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)$$

$$\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left(f(x) + g(x)\right) \geq \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) + \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x)$$

gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$

$$U_{f+g}(Z) \geq U_f(Z) + U_g(Z), \qquad O_{f+g}(Z) \leq O_f(Z) + O_g(Z)$$

also

$$\underline{\int_a^b} \left(f(x) + g(x)\right) dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx,$$

$$\overline{\int_a^b} \left(f(x) + g(x)\right) dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Daraus folgt die Additivität.

Für $\alpha \geq 0$ und jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt weiter

$$U_{\alpha f}(Z) = \alpha U_f(Z), \quad O_{\alpha f}(Z) = \alpha O_f(Z), \quad \text{damit}$$

$$\underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx = \alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx = \alpha \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Für $\alpha < 0$ hat man stattdessen

$$U_{\alpha f}(Z) = \alpha O_f(Z), \quad O_{\alpha f}(Z) = \alpha U_f(Z) \quad \text{und somit}$$

$$\underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx = \alpha \overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx = \alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

In beiden Fällen folgt $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

28.13 LEMMA (Zusammensetzung von Integrationsintervallen)

Ist $a \le c \le b$, so ist f genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn f über $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Beweis: Aussage folgt unmittelbar aus der Betrachtung von Ober- und Untersummen zu Zerlegungen, die c als Knoten enthalten (ggf. durch Verfeinerung zu erreichen)

Kriterien für Integrierbarkeit

28.14 LEMMA (Riemann'sches Kriterium)

Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist integrierbar über $[a,b]$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von $[a,b]$ derart, dass gilt
$$O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Def. des Ober- und Unterintegrals gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen Z_1, Z_2 mit

$$0 \le O_f(Z_1) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - U_f(Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Diese Ungleichungen bleiben beim Übergang zu Verfeinerungen gültig, also kann $Z = Z_1 = Z_2$ gewählt werden. Addition beider Ungleichungen ergibt dann (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $\varepsilon > 0$ folgt aus (ii), dass

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Da also Ober- und Unterintegral identisch sind, ist f integrierbar. □

Wofür kann man das Riemann'sche Kriterium anwenden?

28.15 Satz (Integrierbarkeit monotoner Funktionen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Ist f monoton, so ist f integrierbar.

Beweis: Sei o.B.d.A. f monoton wachsend. Betrachte die äquidist. Zerlegung Z mit $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, \dots, n$.

Dann gilt:

$$O_f(Z) - U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big) \qquad \text{(Äquidist. Zerl.)}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \underbrace{\big(f(b) - f(a)\big)}_{\text{beschränkt}} \qquad \text{(„Ziehharmonikasumme")}$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen 0.

Damit ist f nach dem Riemann'schen Kriterium integrierbar. $\square$.

Gibt es noch eine weitere Anwendung?

28.16 Satz (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Falls f stetig ist, so ist f auch integrierbar.

__Beweis:__ Nach Satz 20.10 ist die stetige Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig. Seien $\varepsilon, \delta > 0$ so gewählt, dass

$$|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (*)$$

Für eine Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$ folgt dann

$$\begin{aligned}
O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \Big) \cdot (x_{i+1}-x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_{i+1}-x_i) && (\text{nach } (*)) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) && (\text{„Ziehharmonikasumme“}) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Damit ist f nach dem Riemann'schen Kriterium integrierbar. □

Welche Konsequenzen hat dieser Satz?

20.17. __Beispiele__

Folgende Funktionen sind über einem Intervall $[a,b]$ integrierbar:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ falls $a \geq 0$.

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln x$ falls $a > 0$.

d) $f(x) = \sin x$

e) Polynomfunktionen: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

f) Stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen.

(Induktionsbeweis über Zahl der Sprungstellen)

Welche Eigenschaften kann man für Integrale mit stetigen Funktionen noch zeigen?

28.18. Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und nichtnegativ.

Dann ex. ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Bem.: Für $\int_a^b g(x)\, dx > 0$ kann

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}$$

als Mittelwert von f im Intervall $[a,b]$ mit einer Gewichtsfunktion g angesehen werden.

Beweis von Satz 28.18:

Seien $m := \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Da g nichtnegativ ist, gilt

$$m \cdot g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq M \cdot g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

und damit nach der Monotonieregel (Lemma 28.9)

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx$$

Somit ex. eine Zahl $\mu \in [m, M]$ („Mittelwert") mit

$$\mu \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 20.9 (b) ex. dann ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Somit gilt

$$f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad \square.$$

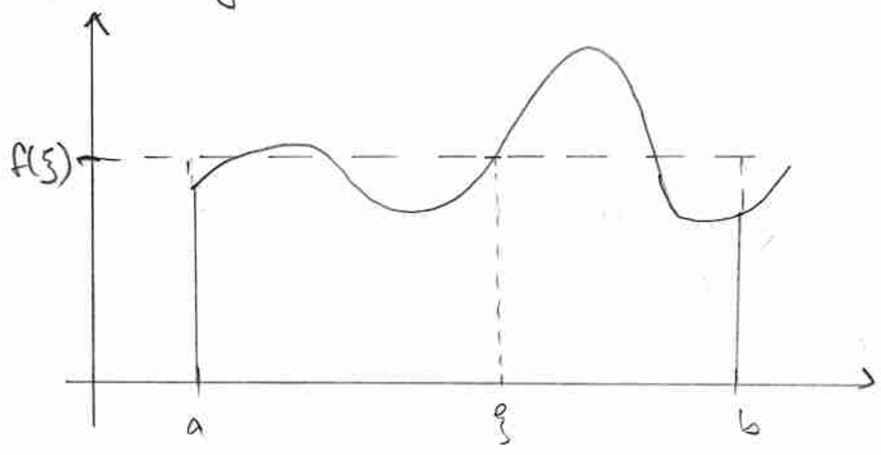
Mit $g(x) = 1 \;\; \forall\, x \in [a,b]$ ergibt sich eine wichtige Folgerung, die oft auch schon als Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet wird:

28.19 Korollar (Integralmittel)

Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

28.20 Veranschaulichung

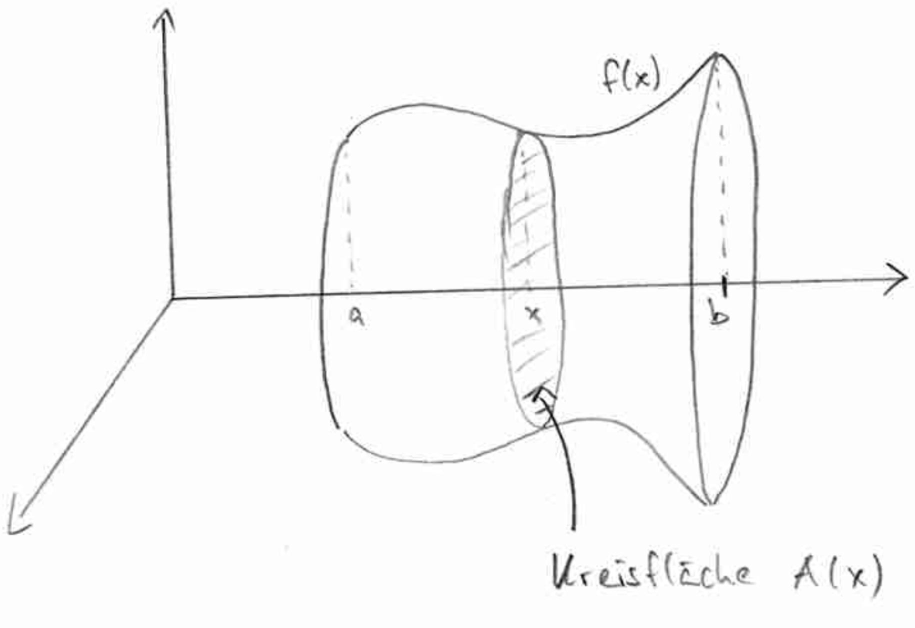


Fläche unter der Kurve stimmt mit der Rechtecksfläche $(b-a)\cdot f(\xi)$ überein:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Eine Anwendung des bestimmten Integrals ist die Volumenberechnung von Rotationskörpern.

28.21. Volumen von Rotationskörpern



Kreisfläche $A(x)$ hat Radius $f(x)$:

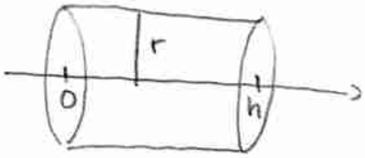
$$\Rightarrow \quad A(x) = \pi \, (f(x))^2 .$$

<u>Prinzip von Cavalieri</u>: Das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich durch Integration der Flächeninhalte $A(x)$ im x-Intervall $[a,b]$.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

28.22. <u>Beispiele</u>

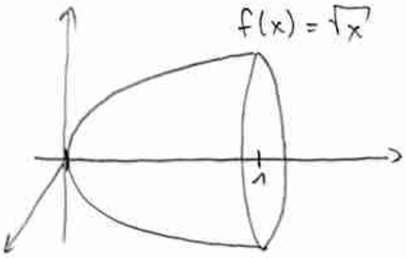
a) <u>Kreiszylinder</u>: $f(x) = r = \text{const.}$



Volumen eines Kreiszylinders mit Radius r und Höhe h:

$$V = \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi r^2 \cdot h .$$

b) <u>Paraboloid</u>



$f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0,1]$:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^1 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

denn $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$