§27 DAS NEWTON-VERFAHREN

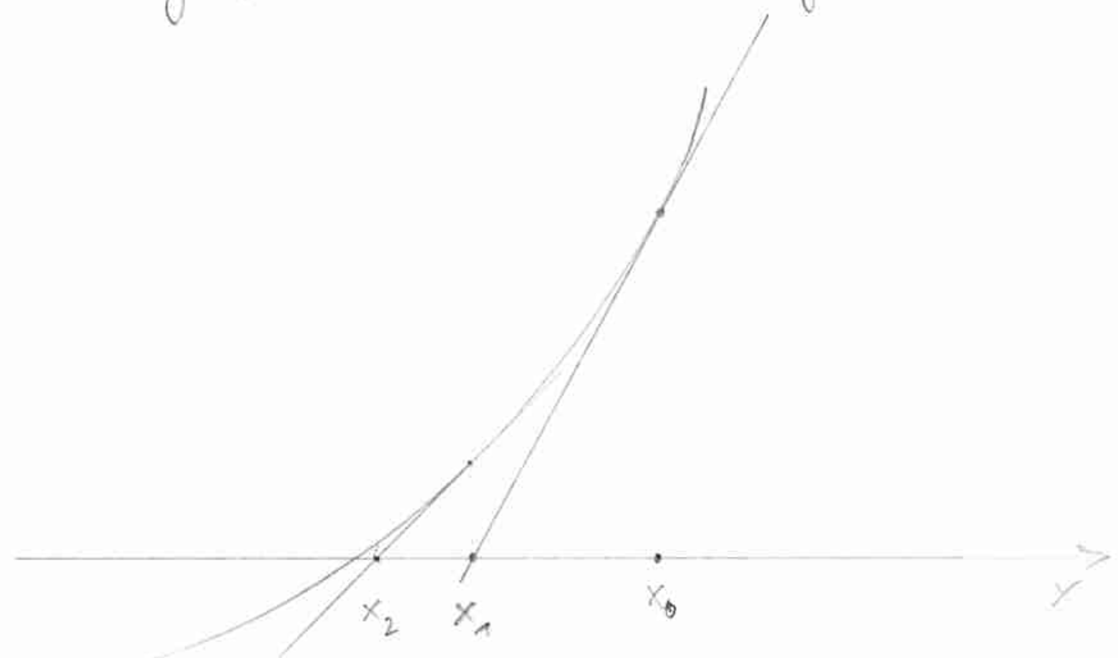
27.1 Motivation

Das Konvergenzverhalten von Fixpunkt-Iterationen zur Lösung nichtlinearer Gleichungen hängt entscheidend von der Wahl der Verfahrensfunktion ϕ ab.
Eine geschickte Wahl von ϕ führt auf das Newton-Verfahren. Es beruht auf einer Taylorapproximation 1. Ordnung (Linearisierung) und konvergiert sehr schnell, falls es konvergiert.

27.2 Newton-Verfahren für eine nichtlineare Gleichung

Wir suchen eine Nullstelle einer skalaren C^1-Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. eine Lsg. der Gleichung $f(x) = 0$.

Das Newton-Verfahren besteht darin, bei einem Näherungswert x_0 den Graphen von f durch die Tangente zu ersetzen und dessen Nullstelle als neue Näherung x_1 zu benutzen. Dieses Vorgehen wird iteriert.



Tangente in x_0: $T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$

(Taylorpolynom 1. Ord.)

$x_1 :=$ Nullstelle von T_1: $\quad 0 \stackrel{!}{=} f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0)$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

allgemeine Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =: \phi(x_k) \quad , k = 0, 1, 2, \dots$$

27.3 Beispiel:

$f(x) = x^2 - 2$ hat Nullstellen bei $\pm\sqrt{2} = \pm 1.4142136\dots$

Mit Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

und Startwert $x_0 := 1$ ergibt sich

k	x_k
0	1.0000000
1	1.5000000
2	1.4166667
3	1.4142157
4	1.4142136

.

27.4 Bemerkung

Das Verfahren konvergiert nicht immer; im Allgemeinen konvergiert es erst, wenn der Startwert x_0 „hinreichend nahe" bei der Nullstelle liegt (lokale Konvergenz).

Einen wichtigen Fall in dem Konvergenz auftritt enthält der folgende Satz.

27.5 Satz (Konvergenz des Newton-Verfahrens):

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal diffbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.
Dann gilt:

a) Es gibt genau ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Ist $x_0 \in [a,b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge
$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$
wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

c) gilt $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K \ \forall x \in (\xi, b)$, so hat man für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen
$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C} |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Beweis von a) und b):

Da f konvex ist, gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und folglich ist f' monoton wachsend in $[a,b]$.
Als stetige Funktion nimmt f sein Minimum an über dem Intervall $[a,b]$, genauer:
$$\exists\, q \in [a,b) \text{ mit } f(q) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} < 0.$$
Falls $q \neq a$, gilt $f'(q) = 0$ und damit $f'(x) \leq 0$ für $x \leq q$ (f' monoton wachs.).
$\Rightarrow$ f ist im Intervall $[a,q]$ monoton fallend
$\Rightarrow$ f kann in $[a,q]$ keine Nullstelle haben.
Dies stimmt auch für $q = a$.

Nach dem Zwischenwertsatz 20.3.6) liegt im Intervall (a,b) mindestens eine Nullstelle von f.
Nach dem bisher Gezeigtem liegen alle Nullstellen in (a,b).

Angenommen, es gäbe zwei Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$.
Nach dem Mittelwertsatz 23.2. existiert $t \in (a,\xi_1)$ mit

$$f'(t) = \frac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1 - a} = \frac{-f(a)}{\underbrace{\xi_1 - a}_{>0}} > 0.$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ für alle $x \geq \xi_1$ (f' mon. wachsend).
$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend (und positiv) in $(\xi_1, b]$
und kann damit keine zweite Nullstelle $\xi_2 \in (\xi_1, b]$ besitzen.

b) Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$.
Nach bisher Gezeigtem gilt: $x_0 \geq \xi$.
Durch Induktion beweisen wir, dass für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (*)$$

gilt: $f(x_n) \geq 0$ und $x_{n-1} \geq x_n \geq \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ind. Anfang: $n=0$ ✓

$n \to n+1$: aus $x_n \geq \xi$ folgt $f'(x_n) \geq f'(\xi) \underset{(\text{vgl. a})}{>} 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$$

$$\underset{\text{nach } (*)}{\Longrightarrow} x_{n+1} \leq x_n.$$

Wir zeigen: $f(x_{n+1}) \geq 0$.

Betrachte dazu die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(x_n) - (x - x_n) f'(x_n)$$

f' ist monoton wachsend

$\Rightarrow \quad g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \leq 0 \quad$ für $\quad x \leq x_n$.

Da $g(x_n) = 0$, gilt $g(x) \geq 0$ für $x \leq x_n$, also

gilt insbesondere

$$0 \leq g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) \underbrace{- f(x_n) - (x_{n+1} - x) f'(x_n)}_{= 0 \text{ nach } (*)} =$$
$$= f(x_{n+1})$$

Aus $f(x_{n+1}) \geq 0$ folgt nach a), dass $x_{n+1} \geq \xi$.

Damit ist gezeigt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ fällt monoton und nach unten beschränkt durch ξ.

$\Rightarrow$ Es ex. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n =: x^*$

Man hat $f(x^*) = 0$ (Fixpunkt-Iteration)

$\Rightarrow x^* = \xi$ wegen der Eindeutigkeit der Nullstelle. $\square$

27.6. Bemerkungen:

a) Analoge Aussagen gelten auch, falls f konkav ist oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt.

b) Die Fehlerabschätzung 27.5. c) besagt, dass beim Newton-Verfahren quadratische Konvergenz vorliegt.

Ist etwa $\frac{K}{2C} \approx 1$ und stimmen x_{n-1} und x_n auf k Dezimalen überein, so ist die Näherung x_n auf $2k$ Dezimalen genau und bei jeder Iteration verdoppelt sich die Zahl der gültigen Stellen.