§26 FIXPUNKT-ITERATION

26.1 Motivation: Iterationsverfahren sind Verfahren der schrittweisen Annäherung. Sie gehören zu den wichtigsten Methoden in der Numerik zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen, z.B. Bisektionsverfahren.

Verfahren zur iterativen Lösung einer nichtlinearen Gleichung

$$f(x) = 0$$

mit einer C^1-Fn. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, haben meist die Form

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \;, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(FPI)}$$

Iterationen dieser Form heissen Fixpunkt-Iterationen mit Verfahrensfunktion ϕ.

Diese Bezeichnung ist wie folgt begründet:

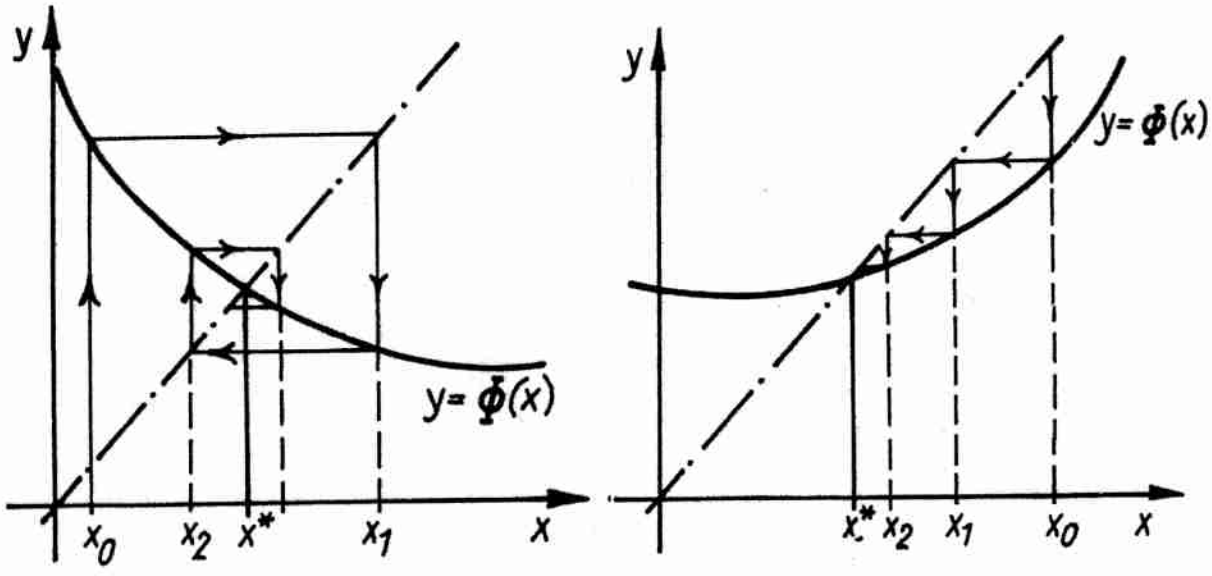
Erzeugt die Iterationsvorschrift (FPI) eine konvergente Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, und ist ϕ stetig, so folgt:

$$x^* := \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) = \phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \phi(x^*).$$

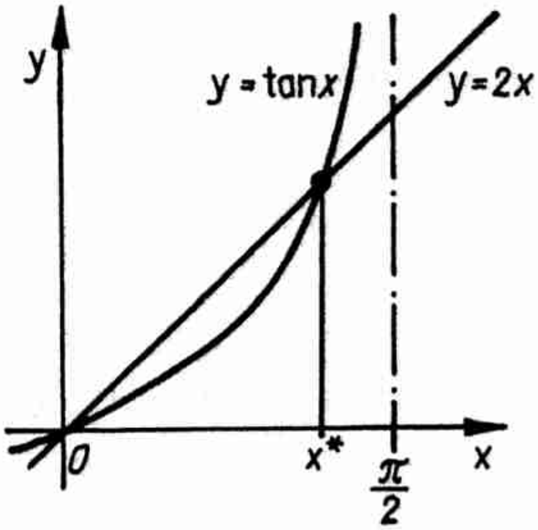
Das Verfahren konvergiert. Der Grenzwert x^* hat die Eigenschaft

$$x^* = \phi(x^*)$$

und ist damit ein Fixpunkt der Verfahrensfunktion ϕ.



Fixpunkt-Iteration



Berechnung von Nullstellen

Wie gewinnt man die Verfahrensfunktion ϕ ?

Man formt die Gleichung $f(x)=0$ in eine äquivalente Gleichung der Form $x=\phi(x)$ um. Dies kann auf vielfältige Art geschehen und hat grossen Einfluss auf das Konvergenzverhalten der Fixpunkt-Iteration.

26.2 Beispiel: Suche (eindeutig bestimmte) Nullstelle $x^* \in]0, \frac{\pi}{2}[$ von $f(x) = 2x - \tan x = 0$.

a) Die Umformung

$$2x - \tan x = 0 \iff x = \frac{1}{2}\tan x =: \phi_1(x)$$

führt mit der Anfangsnäherung / dem Startwert $x_0 := 1.2$ zu

k	x_k
0	1.2
1	1.286075811
2	1.708336214
3	−3.610761599
4	−0.253404236
⋮	⋮

Ab 6 dieser Iteraten konvergiert die Folge (x_k) monoton gegen 0.

b) Die Umformung

$$2x - \tan x = 0 \iff x = \arctan(2x) =: \phi_2(x)$$

führt mit dem gleichen Startwert $x_0 = 1.2$ zu

k	x_k
0	1.2
5	1.165657641
10	1.165561465
15	1.165561186
20	1.165561185
⋮	⋮

Man beobachtet Konvergenz dieser Iteration gegen die gesuchte, nicht-triviale Nullstelle.

<u>Wie weist man die Konvergenz einer Fixpunkt-Iteration nach?</u>

Dazu zunächst

26.3 <u>Definition</u>: Eine Abbildung $\phi: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heisst Lipschitz-stetig auf D, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt mit:

$$\forall x, y \in D: \quad |\phi(x) - \phi(y)| \le L \cdot |x - y|.$$

L heisst <u>Lipschitz-Konstante</u>.
Kann man $L < 1$ wählen, so heisst die Abbildung Φ <u>kontrahierend</u> und L nennt man dann auch <u>Kontraktionskonstante</u> von Φ.

26.4 <u>Bemerkungen</u>:

a) ϕ Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ ϕ stetig, denn:
Aus $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ folgt

$$|\phi(x_k) - \phi(x)| \le L \cdot |x_k - x| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

d.h. $\phi(x_k) \to \phi(x)$ $(k \to \infty)$.

b) Man beachte, dass die Kontraktionseigenschaft durch eine Abschätzung

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le L \cdot |x - y|, \quad \underline{L < 1}$$

gesichert ist.
Die schwächere Abschätzung

$$|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y| \quad \forall x, y \text{ mit } x \neq y$$

leistet das <u>nicht</u>.

26.5 <u>Satz</u>: Jede C^1-Funktion $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $[a,b]$ mit der Lipschitz-Konstanten

$$L := \sup\{ |\Phi'(x)| : a \le x \le b \}.$$

Ist $L < 1$, so ist ϕ kontrahierend;
Ist $L > 1$, so ist ϕ nicht kontrahierend

<u>Beweis</u>: Beh. folgt direkt aus Mittelwertsatz:

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \phi'(\xi)\,|x-y| \le L \cdot |x-y|$$

mit $\xi \in]x,y[$. $\square$

Von zentraler Bedeutung ist

26.6 <u>Satz</u>: (<u>Banachscher Fixpunktsatz, 1D-Version</u>)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\phi : D \to \underline{D}$ eine kontrahierende Abbildung von D in sich (d.h. $f(D) \subset D$) mit Kontraktionskonstante $L < 1$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von ϕ in D.

b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*.

c) Es gelten die Fehlerabschätzungen (a posteriori und a priori Abschätzung):

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n-1}| \le \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0|$$

Beweis: Sei beliebiges $x_0 \in D$ gegeben. Da $\phi : D \to D$, ist die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ durch $x_{k+1} = \phi(x_k)$ eindeutig definiert und für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \le L\,|x_k - x_{k-1}| \le$$

$$\le L^2\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \le \dots \qquad (*)$$

Also durch Iteration der (ersten) Abschätzung folgt für $k \ge n$:

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^{k+1-n}\,|x_n - x_{n-1}| \qquad (*,*)$$

und damit auch für $m \ge n$:

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\le \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \qquad (\Delta\text{-Ungleichung})$$

$$\le \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n} \right) |x_n - x_{n-1}|$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j \right) |x_n - x_{n-1}|$$

$$= L \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} L^j \right) \qquad = \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n-1}|$$

$$\le \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0| \qquad (\text{vgl. } (*) \text{ oder } (*,*))$$

Also gilt für $m \ge n$:

$$|x_m - x_n| \le \frac{L}{1-L}\,|x_n - x_{n-1}| \le \frac{L^n}{1-L}\,|x_1 - x_0|. \qquad \left({*\atop **}\right)$$

Wegen $L<1$ gilt $L^n \to 0 \; (n\to\infty)$ und damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge, also auch konvergent mit einem Grenzwert x^*. Da D abgeschlossen, gilt $x^*\in D$.

ϕ ist stetig (vgl. 26.3 a)) und damit ist der Grenzwert x^* Fixpunkt von ϕ.

x^* ist der einzige Fixpunkt in D. Denn wäre $x^{**}\neq x^*$ ein weiterer Fixpunkt so würde folgen

$$|x^{**}-x^*| = |\phi(x^{**})-\phi(x^*)| \le L\,|x^{**}-x^*| < |x^{**}-x^*|,$$

ein Widerspruch $\lightning$.

Die behauptete Fehlerabschätzungen folgen direkt aus $\left({}^{\;*}_{*\;*}\right)$ wenn $m\to\infty$ strebt.

$\square$

26.7 Bemerkung:

Die Bedingungen des Satzes 26.6 sind eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes und die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration.

26.8 Beispiel:

Man berechne den kleinsten Fixpunkt von $\phi(x) = 0.1e^x$

Wir setzen $D := [-1, 1]$.

Für $x \in D$ gilt $0 < \phi(x) \leq \frac{e}{10} < 1$, also $\phi: [-1,1] \to [-1,1]$.

Es gilt $\phi'(x) = \phi(x)$, also ist ϕ kontrahierend mit

$$L = \sup\{|\phi'(x)| : x \in [-1,1]\} = \frac{e}{10}$$

Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind damit erfüllt.

x^* soll mit einem absoluten Fehler kleiner oder gleich 10^{-6} berechnet werden.

Wir starten mit $x_0 := 1$ und erhalten $x_1 = 0.2718281828$.

Die Forderung

$$\left(|x^* - x_n| \leq\right) \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq 10^{-6}$$

führt mit den vorhandenen Werten auf

$$n \geq \frac{-6}{\log_{10} L} = 10.6062\ldots$$

Es genügen also $n = 11$ Iterationen, um die verlangte Genauigkeit zu garantieren.

Tatsächlich ist nach 11 Iterationen bereits eine zehnstellige Genauigkeit erreicht: $x^* = 0.1118325592$.