§25: GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER ABLEITUNG

25.1. Motivation

- Kann man aus der Kenntnis der Ableitungen Aussagen über den Graphen einer Funktion gewinnen?
- Die Ableitungen liefern sogar sehr viele Aussagen: Monotonie, Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte
- Diese Aussagen bilden die Grundlage der Kurvendiskussion und sind sehr wichtig bei Optimierungsproblemen.

25.2. Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>monoton wachsend</u>, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ gilt: $f(x_2) \geq f(x_1)$.
f ist <u>streng monoton wachsend</u>, wenn stets $f(x_2) > f(x_1)$ gilt.
Die Eigenschaften <u>monoton fallend</u> bzw. <u>streng monoton fallend</u> sind durch $f(x_2) \leq f(x_1)$ bzw. $f(x_2) < f(x_1)$ definiert.

25.3. Satz (<u>Monotonie differenzierbarer Funktionen</u>)
Sei f differenzierbar im Intervall I. Dann gilt:
a) f ist monoton wachsend (mon. fallend) in I
$\iff$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ in I.

b) $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$ in I

$\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend (streng monoton fallend) in I.

Beweis:

a) „$\Rightarrow$" Sei f mon. wachsend und differenzierbar in I.

$$\Rightarrow \quad f(x+h) - f(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } h > 0 \\ \leq 0 & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

für alle $x,\ x+h \in I$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \qquad \forall\, h \neq 0 \text{ mit } x+h \in I$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \geq 0.$$

Analog zeigt man $f'(x) \leq 0$ für f mon. fallend.

„$\Leftarrow$" Sei $f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in I$. Sei $h > 0$ und $x_0, x_0+h \in I$.
Nach dem Mittelwertsatz ex. $\theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h) \geq 0$$

$\Rightarrow$ $f(x_0+h) \geq f(x_0)$ für $x_0 + h > x_0$

d.h. f ist monoton wachsend.

Der Fall $f'(x) \leq 0$ wird analog gezeigt.

b) wie (a) „$\Leftarrow$".

$\square$

25.4. Beispiele

a) Monotonieverhalten von $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+3}$?

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+3)\cdot 1 - (2x+2)x}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+2x+3)^2}$$

Nenner > 0.

$f'(x) \geq 0$ für $3-x^2 \geq 0$ d.h. $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$f'(x) \leq 0$ für $3-x^2 \leq 0$ d.h. $x \leq -\sqrt{3}$ oder $x \geq \sqrt{3}$.

Also ist $f(x)$ monoton wachsend in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ und fallend sonst.

Für $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ gilt sogar $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ streng mon. wachsend in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

b) Die Umkehrung von Satz 25.3.(b) gilt nicht!

Bsp.: $f(x) = x^3$ ist streng mon. wachsend auf $\mathbb{R}$,
aber $f'(0) = 0$.

Die folgenden Begriffe sind wichtig bei Optimierungsproblemen.

25.5. Def.: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u> auf I, wenn für alle $a, b \in I$ und $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$f(\theta a + (1-\theta)b) \leq \theta f(a) + (1-\theta) f(b)$$

Gilt statt dessen

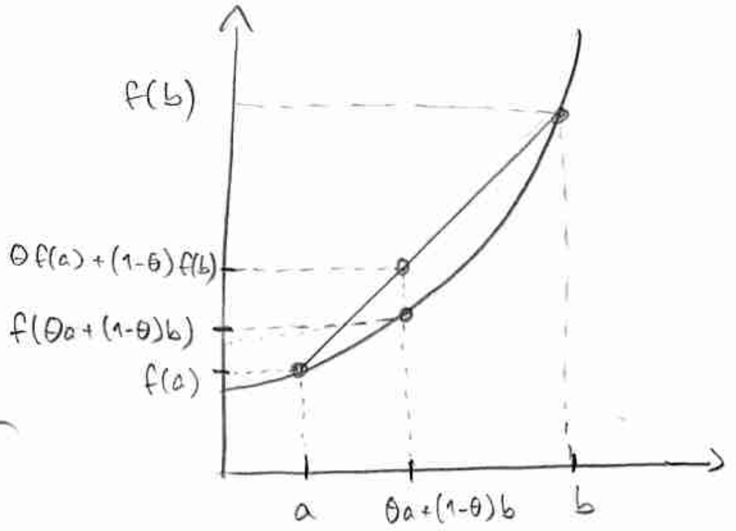
$$f(\theta a + (1-\theta)b) \geq \theta f(a) + (1-\theta) f(b),$$

so heißt f <u>konkav</u>.

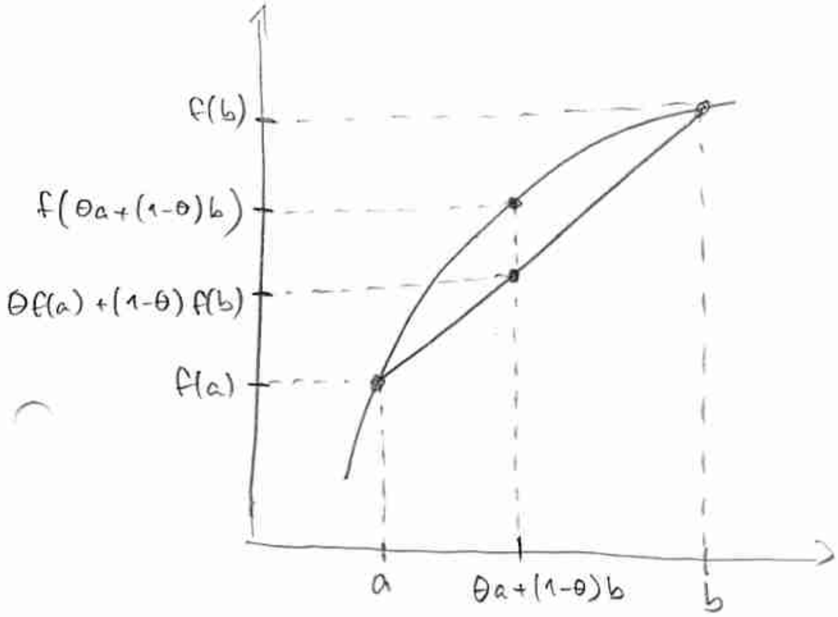
Gilt $<$ statt $\leq$ (bzw. $>$ statt $\geq$), so heißt f <u>streng konvex</u> (bzw. <u>streng konkav</u>).

25.6. Veranschaulichung

Konvexe Funktionen verlaufen unterhalb ihrer Sekanten und weisen eine Linkskrümmung auf.



konvex
(Linkskrümmung)



konkav
(Rechtskrümmung)

Konkave Funktionen verlaufen oberhalb ihrer Sekanten und weisen eine Rechtskrümmung auf.

Damit ist anschaulich klar:

25.7. Satz (<u>Konvexität / Konkavität von C^1-Funktionen</u>)

Sei $f \in C^1(I)$. Dann gilt:

a) f ist in I konvex $\Leftrightarrow$ f' in I mon. wachsend

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ f' in I mon. fallend

Als Folgerung aus Satz 25.3 und 25.7 ergibt sich

25.8. Satz (<u>Konvexität / Konkavität von C^2-Funktionen</u>)

Sei $f \in C^2(I)$. Dann gilt:

a) f ist in I konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ in I

$f''(x) > 0$ in I $\Rightarrow$ f ist in I streng konvex

b) f ist in I konkav $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ in I

$f''(x) < 0$ in I $\Rightarrow$ f ist in I streng konkav.

25.9. <u>Beispiele</u>

a) Typische konvexe Funktionen:

$f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$ mon. wachsend

$g(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$: $g'(x) = e^x$ " "

Wegen $f''(x) = 2 > 0$ und $g''(x) = e^x > 0$ sind f und g sogar streng konvex.

b) $f(x) = \ln x$ ist streng konkav für $x > 0$:

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Lokale Extrema spielen eine wichtige Rolle bei Funktionen.

25.10. Def.: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ ein innerer Punkt in I. (kein Randpunkt!)
ξ heißt lokales Maximum von f in I, falls ein $\varepsilon > 0$ ex. mit

$$|x - \xi| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \le f(\xi).$$

Gilt hingegen

$$|x - \xi| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \ge f(\xi),$$

so heißt ξ lokales Minimum von f in I.

Gilt Gleichheit nur im Punkt ξ, so liegt ein strenges lokales Maximum bzw. strenges lokales Minimum vor.

Wie kann man solche lokalen Extrema finden?

25.11. Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei f in ξ differenzierbar und habe dort ein lokales Extremum (d.h. lokales Maximum oder Minimum). Dann ist $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Wir nehmen an, dass in ξ ein lok. Maximum vorliegt.

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \quad |x - \xi| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \le f(\xi)$$

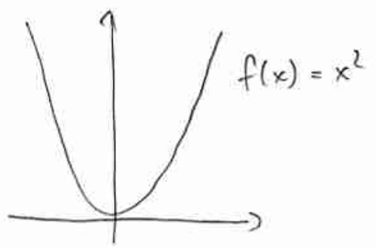
Falls $x > \xi$: $\quad \dfrac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\le 0}}{\underbrace{x - \xi}_{> 0}} \le 0 \qquad (*)$

Falls $x < \xi$: $\qquad \dfrac{\overbrace{f(x)-f(\xi)}^{\le 0}}{\underbrace{x-\xi}_{<0}} \ge 0 \qquad (**)$

Da f in ξ differenzierbar ist, ex. eindeutiger Grenzwert für $x \to \xi$. Wegen $(*)$ und $(**)$ ist $f'(\xi) = 0$.

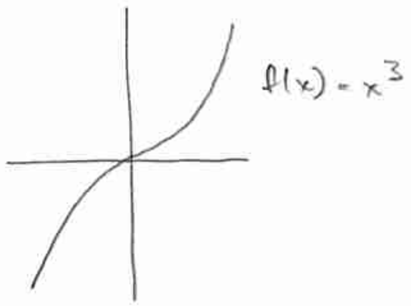
25.12. Beispiele

a)



$f(x) = x^2$ hat in $\xi = 0$ ein (lok.) Minimum.
Wegen $f'(x) = 2x$ ist $f'(0) = 0$.

b) Die Umkehrung zu Satz 25.11 gilt nicht!



Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und somit $f'(0) = 0$.
Dennoch liegt in $\xi = 0$ kein lokales Extremum vor.

Satz 25.11 liefert also nur eine notwendige Bedingung, die nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist.

25.13. Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f \in C^n(I)$, $n \geq 2$, ξ innerer Punkt von I und es gelte $f'(\xi) = f''(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ und $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.

Dann gilt:

a) Ist n gerade, so liegt ein lokales Extremum vor.
Für $f^{(n)}(\xi) > 0$ ist es ein strenges lok. Minimum
für $f^{(n)}(\xi) < 0$ ein strenges lokales Maximum.

b) Für n ungerade handelt es sich um kein Extremum

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $f^{(n)}(\xi) > 0$. Der Fall $f^{(n)}(\xi) < 0$ geht analog. Sei h so klein, dass $\xi + h$ innerer Punkt von I ist. Nach dem Satz von Taylor ex. $\Theta \in (0,1)$ mit

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\xi) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi + (1-\Theta)h)$$

$$= f(\xi) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} \underbrace{f^{(k)}(\xi)}_{0}} + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi + (1-\Theta)h) \qquad (*)$$

Da $f^{(n-1)}$ stetig in I ist und $f^{(n)}(\xi) > 0$ ist, ist $f^{(n-1)}$ in einer Umgebung um ξ streng mon. wachsend:

$$f^{(n-1)}(\xi + (1-\Theta)h) \begin{cases} > 0 & (h > 0) \\ < 0 & (h < 0) \end{cases}$$

Ist n ungerade, so ist $h^{n-1} > 0$ und somit

$$h^{n-1} f^{(n-1)}(\xi + (1-\Theta)h) \begin{cases} > 0 & (h > 0) \\ < 0 & (h < 0). \end{cases}$$

Wegen $(*)$ kann also kein strenges lok. Extremum vorliegen.

Ist n gerade, hat h^{n-1} das Vorzeichen von h, und somit ist

$$h^{n-1} f^{(n-1)}(\xi + \Theta h) > 0 .$$

Nach (*) hat f dann ein strenges lok. Minimum in ξ.

□

25.14. Beispiele

a) Für $f(x) = x^3$ gilt:

$f'(x) = 3x^2$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x$ $\qquad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6$ $\qquad$ $f'''(0) \neq 0$

Also liegt kein Extremum in 0 vor.

b) Für $f(x) = x^4$ gilt

$f'(x) = 4x^3$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2$ $\qquad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x$ $\qquad$ $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24$ $\qquad$ $f^{(4)}(0) > 0$.

Somit liegt in 0 ein strenges Minimum vor.

c) Es gibt Fälle, in denen Satz 25.13 nicht anwendbar ist, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Induktiv kann man nachprüfen:

$f \in C^{\infty}(I)$

$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

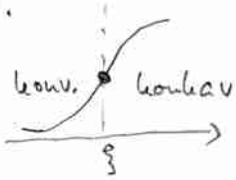
Obwohl in 0 ein strenges lokales Minimum vorliegt, ist Satz 25.13 also nicht anwendbar.
Er liefert somit zwar eine hinreichende Bedingung für strenge lokale Extrema, jedoch keine notwendige Bedingung.

25.15. Def.: Eine in ξ differenzierbare Funktion $f(x)$ hat einen Wendepunkt in ξ, falls $f'(x)$ in ξ ein lokales Extremum hat.

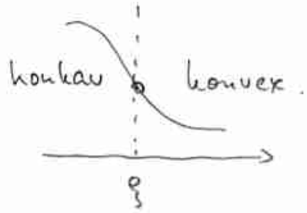
25.16. Bemerkung

Im Wendepunkt wechselt das Krümmungsverhalten:

- Hat $f'(x)$ in ξ ein lok. Maximum, so ist f' in einer Umgebung links von ξ mon. wachsend und rechts von ξ mon. fallend.
(Konvex-konkav-Wechsel).



- Hat $f''(x)$ in ξ ein lok. Minimum, so liegt ein Konkav-konvex-Wechsel vor.



Analog zu Satz 25.11 und Satz 25.12 ex. daher notwendige bzw. hinreichende Kriterien für Wendepunkte vor.

25.17. Satz (Notwendige Bedingung für Wendepunkte)

Sei f in ξ zweimal differenzierbar und habe dort einen Wendepunkt. Dann ist $f''(\xi) = 0$.

25.18. Satz (Hinreichende Bedingung für Wendepunkte)

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $n \geq 2$, ξ inneres Punkt von I mit

$$f''(\xi) = \ldots = f^{(n)}(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(\xi) \neq 0.$$

a) Ist n gerade, so liegt in ξ ein Wendepunkt vor.

Für $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ ist es ein Konkav-konvex-Wechsel,

für $f^{(n+1)}(\xi) < 0$ ein Konvex-konkav-Wechsel.

b) Ist n ungerade, handelt es sich um keinen Wendepunkt.

25.19. Beispiel

Für $f(x) = x^3$ gilt: $f'(x) = 3x^2$ $f'(0)=0$

$f''(x) = 6x$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 6$ $f'''(0) = 6 > 0$.

In $\xi = 0$ liegt daher ein Wendepunkt mit Konkav-konvex-Wechsel vor.

25.20. Kurvendiskussion

Ziel einer Kurvendiskussion ist die Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens des Graphen einer Funktion $y = f(x)$.

Hierzu gehören typischerweise folgende Untersuchungen:

a) Maximaler Definitionsbereich

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

hat Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Symmetrien

- $f(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse (gerade Funktion), falls $f(-x) = f(x)$ $\forall x$.

  Bsp.: $f(x) = \cos x$ ist gerade Fkt.

- $f(x)$ ist symm. zum Ursprung (ungerade Fkt.) falls $f(-x) = -f(x)$ $\forall x$

c) Polstellen

Hat $f(x)$ die Form $f(x) = \dfrac{g(x)}{(x-\xi)^k}$ mit $g(x)$ stetig in ξ und $g(\xi) \neq 0$, so besitzt $f(x)$

- für ungerades k einen Pol mit Vorzeichenwechsel
- für gerades k einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$ hat in $\xi = 0$ einen Pol ohne Vorzeichenwechsel.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = -\infty.$$

d) Verhalten im Unendlichen

bestimme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, falls existent.

Untersuchung auf Asymptoten:

Eine Gerade $y = ax+b$ heißt Asymptote von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, falls $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax+b)$ gilt.

a und b werden bestimmt durch

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$\left.\begin{aligned} a &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+3x-4}{x^3} = 0 \\ b &= \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \end{aligned}\right\} \quad y = 2 \text{ ist Asymptote}$$

e) Nullstellen

können bei Polynomen vom Grad ≤ 4 analytisch bestimmt werden. Ansonsten muss man „raten“ oder num. Verfahren (z.B. Bisektionsverfahren 20.9, weitere Verfahren folgen) verwenden.

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$2x^2+3x-4=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x_1 \approx -2{,}35$$

$$x_2 \approx 0.85$$

f) Extrema, Monotonieintervalle

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2(4x+3) - 2x(2x^2+3x-4)}{x^4}$$

$$= \frac{-3x^2+8x}{x^4} = \frac{8-3x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff x_3 = \frac{8}{3}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) \approx 2{,}56.$$

$$f''(x) = \frac{x^3(-3) - 3x^2(8-3x)}{x^6} = \frac{6x^3-24x^2}{x^6} = \frac{6x-24}{x^4}$$

$f''\left(\frac{8}{3}\right) < 0 \Rightarrow f$ hat in $x_3 = \frac{8}{3}$ lok. Max.

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty \quad \text{(streng mon. fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} \quad \text{(str. mon. wachsend)} \\ < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(str. mon. fallend)} \end{cases}$$

g) Wendepunkte

Bsp.: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{x^2}$

$$0 = f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \implies x_4 = 4$$

$$f(4) = \frac{5}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{x^4 \cdot 6 - 4x^3(6x-24)}{x^8} = \frac{-18x^4+96x^3}{x^8} = \frac{96-18x}{x^5}$$

$f'''(4) > 0$: Konkav – konvex – Wechsel.

h) Skizze

im Beispiel