§ 24: DER SATZ VON TAYLOR

24.1 Motivation

- Für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ stellt die Tangente

$$t(x) = f(\xi) + (x-\xi) f'(\xi)$$

eine lokale Approximation durch ein Polynom 1. Grades im Punkt ξ dar.

- Ist es möglich, $f(x)$ in ξ durch ein Polynom höheren Grades zu approximieren, falls f eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt?

24.2. Satz (Satz von Taylor)

Sei $\xi \in (a,b)$ und $f \in C^{m+1}[a,b]$.

Dann besitzt $f(x)$ folgende Taylorentwicklung um ξ:

$$f(x) = T_m(x,\xi) + R_m(x,\xi)$$

mit dem Taylorpolynom m-ten Grades

$$T_m(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

und dem Restglied nach Lagrange

$$R_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \Theta\cdot(x-\xi))$$

mit $\Theta \in (0,1)$.

Beweis:

Betrachte $g(x) := f(x) - T_m(x,\xi)$.

Dann ist
$$g(\xi) = f(\xi) - T_m(0) = f(\xi) - f(\xi) = 0,$$
$$g'(\xi) = f'(\xi) - T_m'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$
$$\vdots$$
$$g^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(\xi) - f^{(m)}(\xi) = 0$$

Nun wenden wir den 2. Mittelwertsatz auf $\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}}$ an:

$\exists\, \xi_1$ zwischen ξ und x mit
$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g(x) - \overbrace{g(\xi)}^{0}}{(x-\xi)^{m+1} - (\xi-\xi)^{m+1}} \overset{2.\text{MWS}}{=} \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m},$$

Induktiv folgt
$$\frac{g(x)}{(x-\xi)^{m+1}} = \frac{g'(\xi_1)}{(m+1)(\xi_1-\xi)^m} = \frac{g''(\xi_2)}{(m+1)m(\xi_2-\xi)^{m-1}}$$
$$= \dots = \frac{g^{(m)}(\xi_m)}{(m+1)!(\xi_m-\xi)} = \frac{g^{(m+1)}(\xi_{m+1})}{(m+1)!}$$

mit ξ_k zwischen ξ und x für $k = 1, \dots, m+1$.

Mit $g(x) = f(x) - T_m(x,\xi)$ folgt also
$$f(x) - T_m(x,\xi) = \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\xi_{m+1}).$$

Wegen $g^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x)$ ist daher
$$f(x) = T_m(x,\xi) + \frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_{m+1})$$
mit ξ_{m+1} zw. ξ und x. $\square$

24.3. Bemerkungen a) Für $m=0$ folgt der erste Mittelwertsatz

b) Man kann sogar zeigen, dass $T_m(x,\xi)$ das einzige Polynom vom Grad $\le m$ ist, das die Approximationsgüte $O((x-\xi)^{m+1})$ besitzt.

c) Neben der Restglieddarstellung nach Lagrange gibt es noch andere Darstellungen des Restglieds.

24.4. Beispiele

a) Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion um $\xi=0$:

Aus
$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi+\theta\cdot(x-\xi))$$
folgt mit $\xi=0$ und $\frac{d^k}{dx^k}e^x=e^x$:
$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}+\underbrace{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta x}}_{R_m(x,0)}\quad\text{mit}\quad 0<\theta<1.$$

Für $0\le x\le 1$ hat man beispielsweise die Fehlerabschätzung
$$|R_m(x,0)|\le\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta x}\le\frac{1}{(m+1)!}\cdot e.$$

Hieraus folgt für $m=10$:
$$|R_{10}(x,0)|\le\frac{1}{11!}e\approx 6{,}81\cdot 10^{-8}.$$

b) Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion um $\xi = 0$.

Mit $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

und $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ folgt, dass $T_m(x, 0)$

keine geraden Potenzen in x enthält:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \cos 0 = 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x \qquad -\sin 0 = 0$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(\sin x) = -\cos x \qquad -\cos 0 = -1$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(\sin x) = \sin x \qquad \sin 0 = 0$$

$$\frac{d^5}{dx^5}(\sin x) = \cos x \qquad \cos 0 = 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Damit gilt:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(\sin x)\Big|_{x=0} + R_{2n+2}(x, 0)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x, 0)$$

mit

$$R_{2n+2}(x, 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \qquad 0 < \theta < 1$$

Für $|x| \leq 1$ und $n = 3$ folgt beispielsweise.

$$|R_8(x, 0)| \leq \frac{1}{9!} \approx 2.8 \cdot 10^{-6}.$$

24.5. Def.: Für eine C^∞-Funktion f bezeichnet man die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

als Taylorreihe um den Entwicklungspunkt ξ.

24.6. Bemerkungen

a) Die Taylorreihe muss i. A. nicht konvergieren.

b) Konvergiert sie, so muss sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren.

c) Ist dies jedoch der Fall, so dass also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

für alle $x \in (a,b)$ gilt, so heißt f reell analytisch (C^ω-Funktion) auf (a,b).

d) Die Taylorreihe einer C^∞-Funktion f mit Entwicklungspunkt ξ konvergiert in x genau dann gegen $f(x)$, wenn $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x,\xi) = 0$.

24.7. Beispiele

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist die Taylorreihe zur Exponentialfunktion mit Entwicklungspunkt $\xi = 0$. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.
Allgemein gilt: Ex. eine Potenzreihendarstellung, so ist dies die Taylorreihe.

b) Die Binomialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist die Taylorreihe zu $(1+x)^\alpha$ im Entwicklungspunkt $\xi = 0$. Sie hat den Konvergenzradius $r = 1$. (vgl. 19.11)

c) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$

ist aus $C^\infty(\mathbb{R})$.

Nachrechnen zeigt, dass $f^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow \quad T_m(x,0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Die Taylorreihe verschwindet somit; $f(x) = R_m(x,0)$.
Für $x>0$ konvergiert die Taylorreihe nicht gegen $f(x)$.
$f(x)$ ist nicht reell analytisch.

24.8. Satz (Differentiation von Potenzreihen)

Die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit dem Konvergenzradius r dargestellte Funktion ist gliedweise differenzierbar.
Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ hat den selben Konvergenzradius und stellt in $(-r,r)$ die Funktion dar.

24.9. Beispiel

Die Sinusreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\sin x$. Gliedweise Differentiation ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Dies ist gerade die Cosinusreihe (vgl. 21.6).
Sie konvergiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$.