§23. MITTELWERTSÄTZE UND REGEL VON L'HOSPITAL

23.1. Motivation

- Für stetige Funktionen gab es wichtige Aussagen wie der Nullstellensatz 20.9 (a) und der Zwischenwertsatz 20.9. (b).
  Gibt es ähnliche Aussagen für differenzierbare Funktionen?
- Gibt es einen Trick, wie man Grenzwerte der Form „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" einfach berechnen kann?

23.2. Satz (Mittelwertsätze)

a) Satz von Rolle: Sei $f \in C^1[a,b]$ mit $f(a) = f(b)$.
Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

b) (Erster) Mittelwertsatz: Sei $f \in C^1[a,b]$.
Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

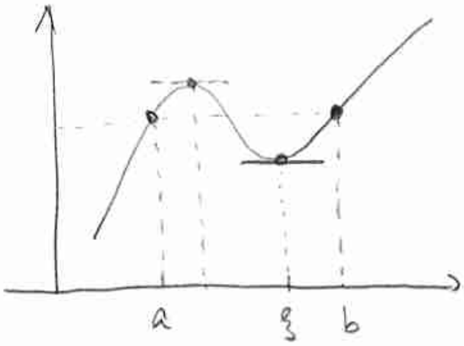
c) Zweiter Mittelwertsatz:
Seien $f, g \in C^1[a,b]$ mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Veranschaulichung

a) Satz von Rolle:

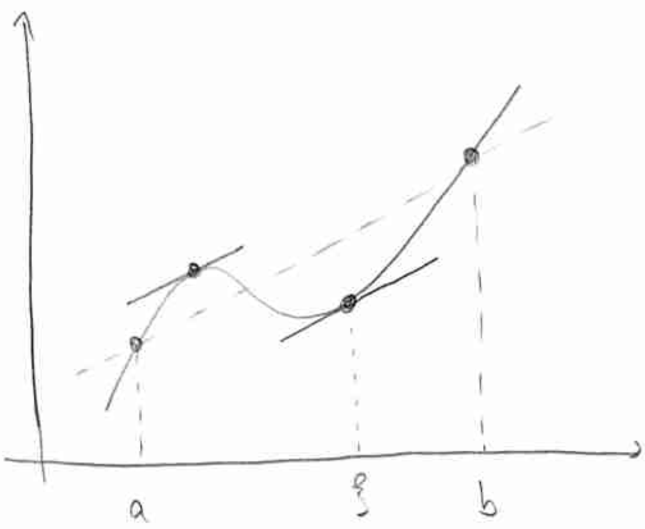
Es gibt eine waagrechte Tangente in (a,b), falls $f(a) = f(b)$.



(Hier gibt es sogar 2 Punkte mit verschwindender Ableitung)

b) Mittelwertsatz:

Zu jeder Sekante ex. parallele Tangente.



(ebenfalls 2 Punkte, die den MWS erfüllen)

Beweis

Wir zeigen nur (b)

(b) Für $f \in C^1[a,b]$ erfüllt

$$h(x) := f(x) - \frac{x-a}{b-a}\,(f(b)-f(a))$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle:

$h \in C[a,b]$,

$$\left.\begin{aligned} h(a) &= f(a) \\ h(b) &= f(b) - \frac{b-a}{b-a}\,(f(b)-f(a)) = f(a) \end{aligned}\right\} h(a) = h(b)$$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ mit:

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{1}{b-a}\,(f(b)-f(a))$$

d.h. $$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

Der zweite Mittelwertsatz hat eine interessante Anwendung:

23.3. Satz (L'Hospital'sche Regel)

a) Fall „$\frac{0}{0}$":

Seien f, g stetig diff'bar auf (a,b), $\xi \in (a,b)$, $f(\xi) = g(\xi) = 0$, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \neq \xi$.

Dann folgt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

b) Fall „$\frac{\infty}{\infty}$":

Seien f, g: stetig diff'bar auf $(a,b) \setminus \xi$ und

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \infty$$

und es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \neq \xi$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wenn der rechte Grenzwert existiert.

Beweis von (a):

Wegen $f(\xi) = g(\xi) = 0$ und dem 2. MWS ex. $\eta = \eta(x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} \overset{2.\text{MWS}}{=} \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

mit $\eta(x)$ zwischen x und ξ.

Für $x \to \xi$ gilt daher auch $\eta(x) \to \xi$ und es folgt die Beh. $\square$

23.4. Beispiele

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ hat die Form „$\frac{0}{0}$". Mit L'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x}$ ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$". L'Hospital liefert

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0.$$