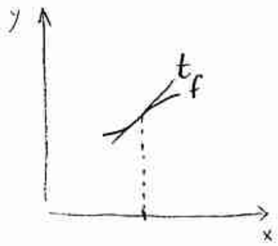
§22. DIFFERENZIERBARKEIT

22.1. MOTIVATION

- Wird durch eine Funktion beschrieben, wie sich eine Größe abhängig von einer anderen verändert, so stellt sich die Frage:
  „Wie schnell" ändert sich die abhängige Größe?
  Beschreibt die Funktion z.B. den Ort eines Massenpunktes abhängig von der Zeit (Bewegung entlang einer Linie), so ist dies die Frage nach der Geschwindigkeit (zu jedem Zeitpunkt).
- Betrachtet man eine Funktion nur in der unmittelbaren Nähe einer Stelle, dann möchte man sie dort durch eine einfachere Funktion möglichst gut annähern, z.B. $f(x)$ durch $t(x) = ax+b$ $(a,b \in \mathbb{R})$ (affin-lineare Funktion)



Diese und ähnliche Fragen beantwortet die Ableitung, auch Differentiation genannt.

22.2 DEFINITION

Es sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben.
$f(x)$ heißt differenzierbar in ξ, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert.

In diesem Fall heißt der Grenzwert Ableitung von $f(x)$ in ξ oder auch Differentialquotient von $f(x)$ in ξ und wird mit

$$f'(\xi) \qquad \text{oder} \qquad \frac{df}{dx}(\xi)$$

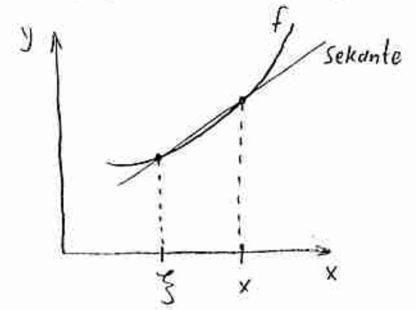
bezeichnet.

Ist f in allen $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

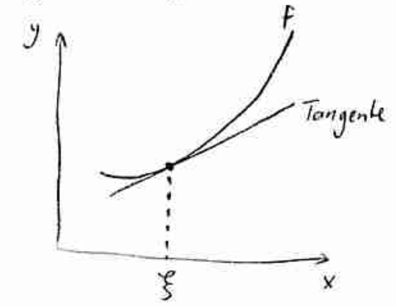
22.3 Bemerkungen

a) Der Ausdruck $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ heißt <u>Differenzenquotient</u>.

Er gibt die Steigung der <u>Sekante</u> zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ des Graphen von f an.



Für $x \to \xi$ (also $\Delta x \to 0$) geht die Sekantensteigung in die Tangentensteigung im Punkt $(\xi, f(\xi))$ über,



$$f'(\xi) = \frac{dy}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

b) Gleichung der Tangente t an f in $(\xi, f(\xi))$:

$$t(x) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi).$$

c) Schränkt man bei der Grenzwertbildung x auf Werte größer / kleiner ξ ein, so erhält man die <u>einseitigen</u> Grenzwerte

$$f'(\xi^+) := \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$$f'(\xi^-) := \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

die als <u>rechtsseitige</u> bzw. <u>linksseitige Ableitung</u> von $f(x)$ in ξ bezeichnet werden.

d) Wie im Falle der Stetigkeit übertragen sich die Begriffe sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereich $D \subsetneq \mathbb{R}$.

22.4 Beispiel

Es sei $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Für beliebige $x,\xi\in\mathbb{R}$ gilt dann $f(x)-f(\xi)=x^n-\xi^n=(x-\xi)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\ldots+\xi^{n-1})$

für $x\neq\xi$ also $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\dfrac{x^n-\xi^n}{x-\xi}=x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\ldots+\xi^{n-1}$,

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=n\xi^{n-1}.$$

Also ist $f(x)=x^n$ überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x)=nx^{n-1}$.

22.5 Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$, $x>0$	$\dfrac{1}{x}$

Um aus diesen Ableitungen die vieler weiterer Funktionen „zusammensetzen" zu können, benötigt man die Ableitungsregeln, die im folgenden Satz zusammengefasst sind.

22.6 SATZ (Differentiationsregeln)

a) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\xi\in\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f in ξ auch stetig.

b) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f+\beta g$ in ξ differenzierbar mit

$$(\alpha f+\beta g)'(\xi) = \alpha\cdot f'(\xi)+\beta\cdot g'(\xi).$$

c) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar, so ist auch $f\cdot g$ in ξ differenzierbar mit

$$(f\cdot g)'(\xi) = f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi). \qquad \text{(Produktregel)}$$

d) Sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und $g(\xi)\neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in ξ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)\cdot g(\xi)-f(\xi)\cdot g'(\xi)}{(g(\xi))^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

e) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\xi\in\mathbb{R}$ sowie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $\eta=f(\xi)\in\mathbb{R}$ differenzierbar, so ist auch ihre Komposition $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ in ξ differenzierbar mit

$$(g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi). \qquad \text{(Kettenregel)}$$

f) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $\xi\in[a,b]$ differenzierbar mit $f'(\xi)\neq 0$, so ist auch die inverse Funktion

$$f^{-1}:[f(a),f(b)]\longrightarrow\mathbb{R}$$

in $\eta=f(\xi)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(\eta)=\frac{1}{f'(\xi)}.$$

Bemerkungen: Auch diese Aussagen übertragen sich sinngemäß auf Funktionen mit Definitionsbereichen $D\subsetneq\mathbb{R}$. (f) gilt auch für streng monoton fallende Funktionen (Definitionsbereich von f^{-1} dann $[f(b),f(a)]$).

<u>Beweis:</u> Wir zeigen nur beispielhaft (c) (Produktregel). Die übrigen Beweise verlaufen ähnlich.

Aufgrund der Grenzwertsätze (20.4) gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x)\overbrace{-f(\xi)g(x)+f(\xi)g(x)}^{\text{„geschickt Null addiert"}}-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,g(x) + f(\xi)\,\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)$$

$$= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$$

□

22.7. Beispiele

a) Mit $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ folgt

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\overset{22.6.c}{=} \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Mit $y = \tan x$ erhält man mit 22.6.(f).

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}(\tan x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

(c)-(e): → S. 153

22.8. Bemerkung

Während Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, gilt die Umkehrung nicht:

$f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar

$(f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-))$

zu 22.7:

c) $\frac{d}{dx}\left(\sin(e^x)\right) = \cos(e^x)\cdot e^x$

d) $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right)$

$= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a. \qquad (a>0)$

e) Sei $x>0$.

$\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}\right)$

$= e^{x\ln x}\left(1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x}\right)$

$= x^x(\ln x + 1)$

22.9. Def.: Sei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung f'. Falls $f'(x)$ wiederum differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, so erhält man die <u>zweite Ableitung</u> $f''(x)$ von $f(x)$. Analog definiert man höhere Ableitungen $f'''(x), f''''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

Ist $f(x)$ n-mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) =: \frac{d^n}{dx^n}f(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, so schreibt man <u>$f\in C^n(\mathbb{R})$</u>. (Gilt dies für alle $n\in\mathbb{N}$, schreibt man <u>$f\in C^\infty(\mathbb{R})$</u>.) und bezeichnet f als <u>n-mal stetig differenzierbar</u> auf $\mathbb{R}$.

Bem.: Die Definitionen übertragen sich sinngemäß auf Intervalle $[a,b]$, wobei in a nur rechtsseitige und in b nur linksseitige Ableitungen betrachtet werden. Ist f auf $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar, schreibt man $f \in C^n[a,b]$.

Statt $C^0[a,b]$ oder $C^0(\mathbb{R})$ schreibt man meist $C[a,b]$ bzw. $C(\mathbb{R})$ für die stetigen Fkt. auf $[a,b]$ bzw. $\mathbb{R}$.

22.10. Beispiel

$$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 2$$

$$f'(x) = 15x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 30x + 12$$

$$f'''(x) = 30$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall n \geq 4$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$