§21. WICHTIGE STETIGE FUNKTIONEN

21.1. Motivation

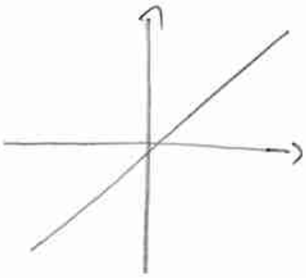
- Es gibt einige stetige Funktionen, die so wichtig sind, dass sie einen eigenen Namen tragen.
- Wir wollen diese Funktionen und ggf. ihre Umkehrfunktionen genauer betrachten.

21.2. Potenzfunktionen

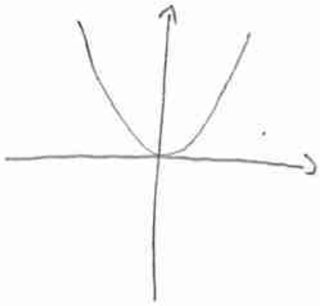
Potenzfunktionen besitzen die Struktur $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^n \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0.$$

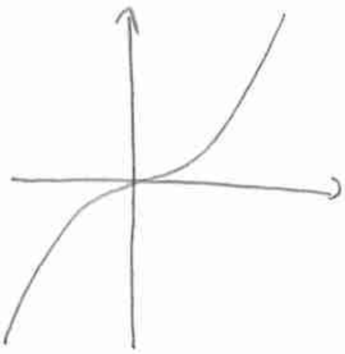
Beispiele:



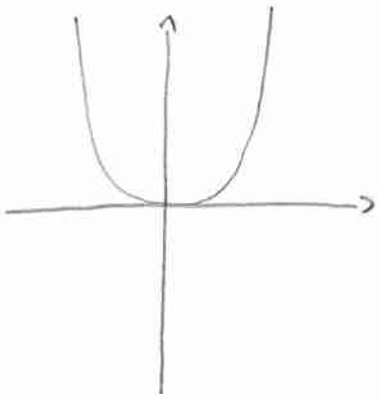
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

Für $n=0$ definiert man $x^0 := 1$.
Wie alle Polynomfunktionen sind Potenzfunktionen stetig

Es gelten die Rechenregeln:

$$(x \cdot y)^n = x^n y^n$$

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

21.3. Wurzelfunktionen

Schränkt man Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, so sind sie dort nicht nur stetig, sondern auch streng monoton wachsend. Nach 20.9. (d) existiert daher eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion.

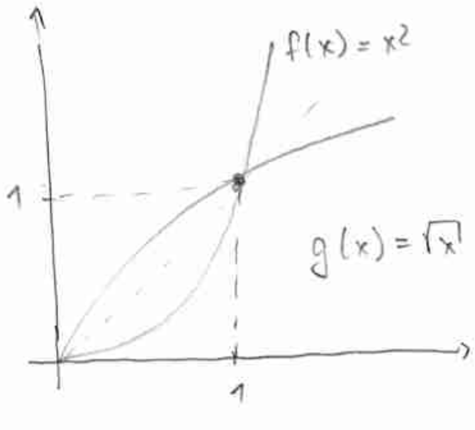
Die Umkehrfunktion zur n-ten Potenzfunktion

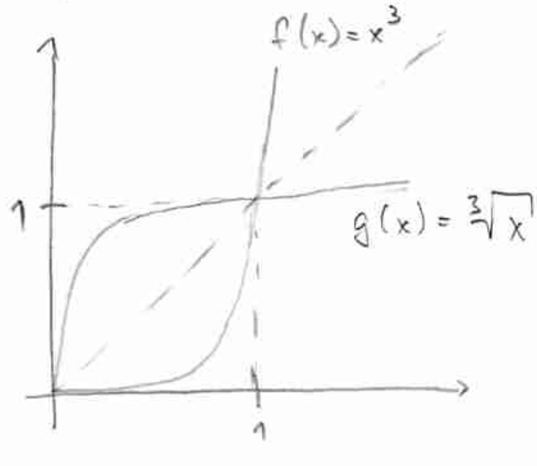
$$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : \quad x \mapsto x^n$$

nennt man <u>n-te Wurzelfunktion</u>

$$g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Statt $\sqrt[2]{x}$ schreibt man auch $\sqrt{x}$.





Setzt man

$$x^{1/n} := \sqrt[n]{x}, \qquad x^{n/m} := \sqrt[n]{x^m}, \qquad x^{-n/m} := \frac{1}{x^{n/m}}$$

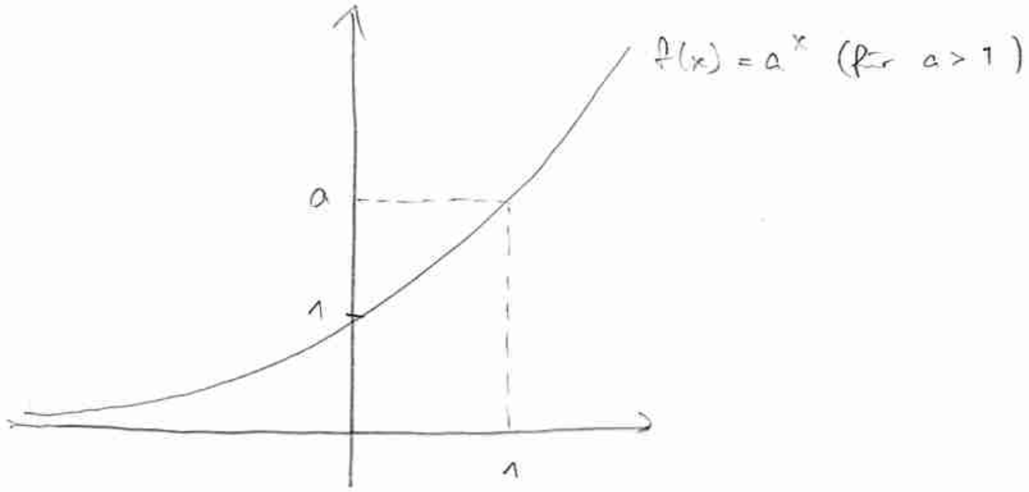
So gelten für $x^{n/m}$ die gleichen Rechenregeln wie für die Potenzfunktionen in 21.2.

21.4. Exponentialfunktionen

Sei $a > 0$. Dann bezeichnet man mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^x$$

die Exponentialfunktion zur Basis a.



Exponentialfunktionen sind stetig.
Es gilt die Funktionalgleichung $\quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. $\quad (*)$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion, bei der die Euler'sche Zahl

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182\ldots$$

als Basis dient (vgl. 14.15). Man bezeichnet sie als

$$\exp(x) := e^x .$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat $\exp(z)$ die Potenzreihendarstellung

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \ldots$$

Sie konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
exp wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $e^z = e^x \cdot e^{iy}$

Denn $e^z = e^{x+iy} \overset{(*)}{=} e^x e^{iy}$

b) $e^x > 0$

Denn. Für $x \geq 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 0$.

Für $x < 0$ ist $e^x = \frac{1}{\underbrace{e^{-x}}_{\geq 0}} \geq 0$

c) $|e^{iy}| = 1$.

Denn: $|e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = e^{iy}e^{-iy} = e^{iy-iy} = e^0 = 1$

d) $|e^z| = e^x$

Denn: $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| \overset{(c)}{=} |e^x| \overset{(b)}{=} e^x$

→ 21.5. Logarithmusfunktionen (S. 145)

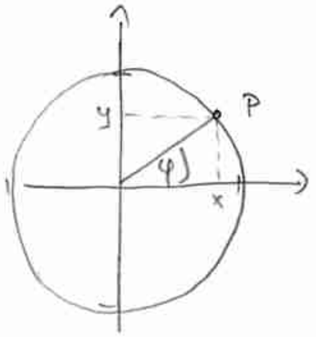
21.6. Trigonometrische Funktionen

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel φ mit

$y = \sin\varphi$

$x = \cos\varphi$

bezeichnet:



Hierdurch wird die Sinusfunktion $\sin\varphi$ und die Cosinusfunktion $\cos\varphi$ definiert.

Dabei misst man den Winkel φ im Bogenmaß:
Länge des Kreissegments von $(1,0)$ bis zum Punkt P.

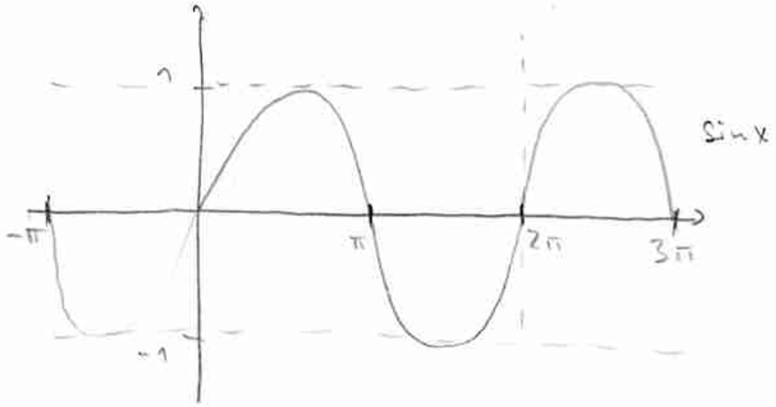
Der Umfang eines Einheitskreises beträgt 2π.
Dabei beschreibt π die Kreiszahl

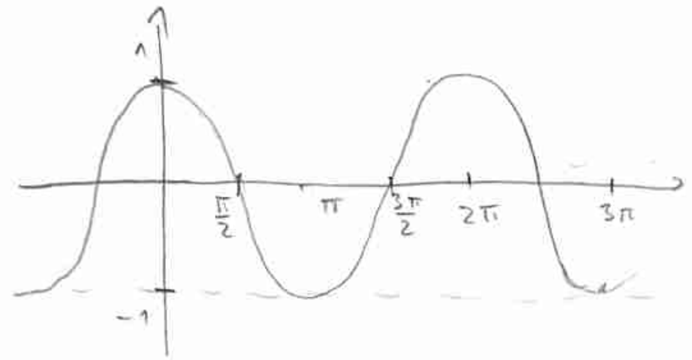
$$\pi \approx 3{,}14159\ldots$$

Da das Bogenmaß 2π einem Gradmaß von 360° entspricht, gilt

Gradmaß	Bogenmaß
0°	0
45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
α	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$

Sinus- und Cosinusfunktion haben die Gestalt





Es gilt:

a) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ (ÜA)

b) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ (ungerade Fkt.)

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ (gerade Fkt.)

c) 2π-Periodizität:

$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$

$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$

d) Additionstheoreme:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

e) Potenzreihendarstellung:

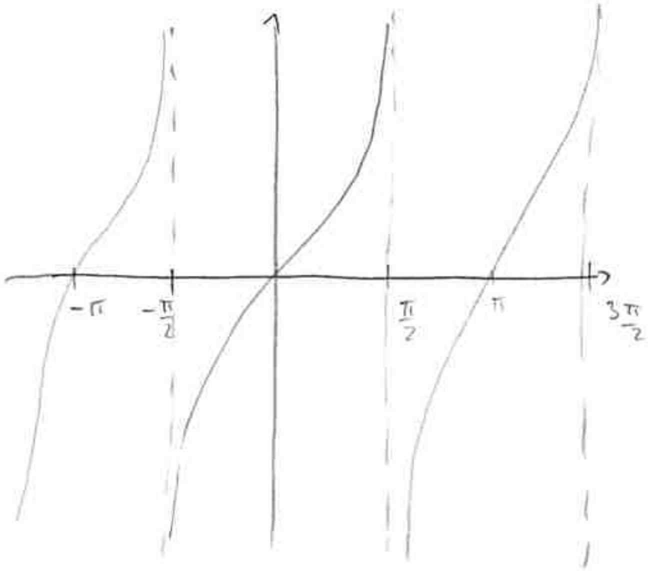
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.
Sinus- und Kosinusfunktion sind stetig und es gilt die Moivre-Formel

$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (ÜA).

Die Tangensfunktion $\tan\varphi$ ist definiert durch $\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.



π-Periodizität:

$\tan\varphi = \tan(\varphi + \pi)$

Sie ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

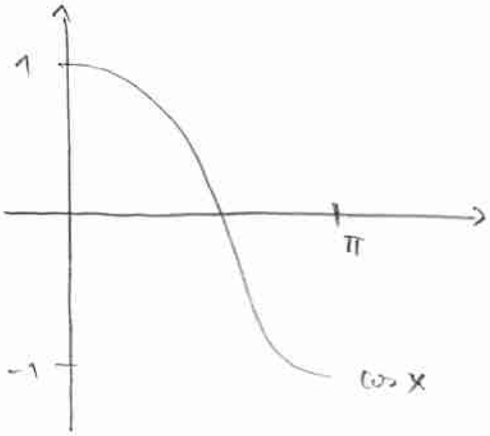
21.7. Trigonometrische Umkehrfunktionen

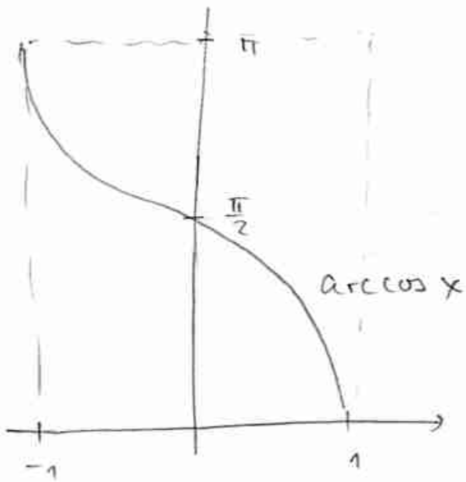
Wenn wir die trigonometrischen Funktionen auf ein Intervall einschränken, auf dem sie streng monoton sind, können wir dort Umkehrfunktionen definieren.

a) cos ist in $[0, \pi]$ streng mon. fallend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

heißt <u>Arcus-Cosinus</u>. Sie ist stetig.

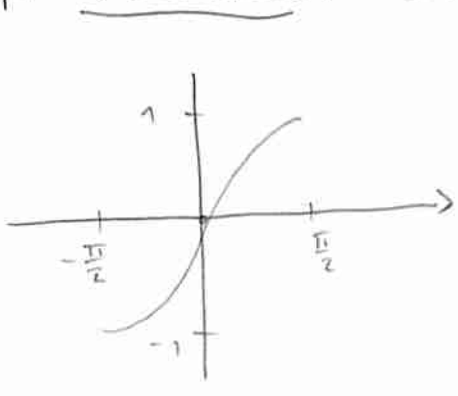


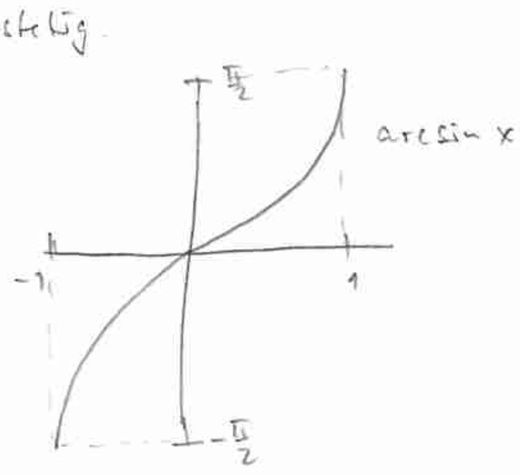


b) sin ist in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend mit Wertebereich $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

heißt <u>Arcus-Sinus</u>. Sie ist stetig.

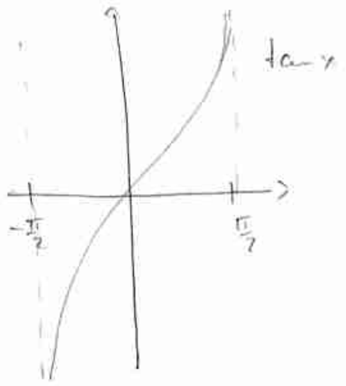


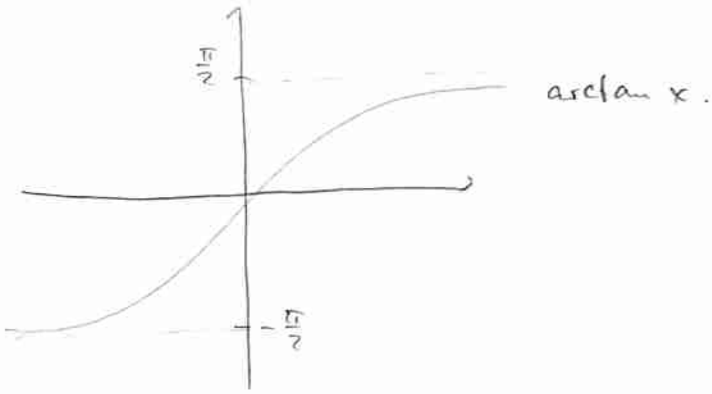


c) tan ist in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng mon. wachsend mit Wertebereich $\mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \quad \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt <u>Arcus-Tangens</u>. Er ist stetig.



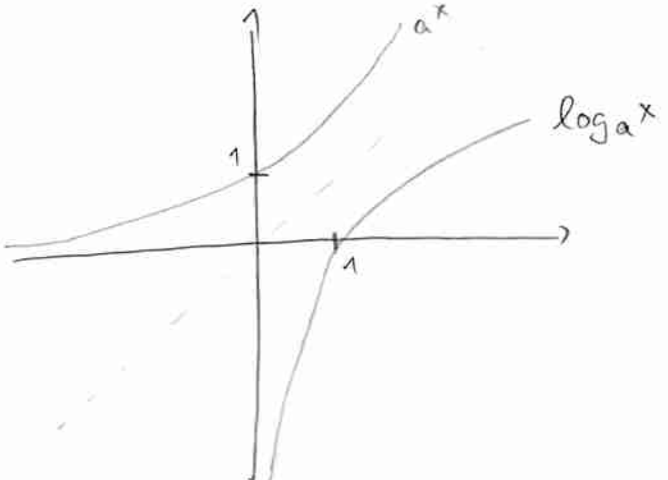


21.5. <u>Logarithmusfunktionen</u>

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ (mit $a > 1$) ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. Ihre Umkehrfunktion

$$\log_a : \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

bezeichnet man als <u>Logarithmusfunktion zur Basis a</u>.



$(a > 1)$

Für $a = e$ ergibt sich der <u>natürliche Logarithmus</u> ln.

Es gelten die Rechenregeln:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x^p) = p \log_a x$$

Logarithmusfunktionen wachsen langsamer als Potenzfunktionen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0 \qquad \text{für } a > 1,\ n \in \mathbb{N}$$