§ 20. STETIGKEIT

20.1. Motivation

- In technischen Systemen erwartet man häufig, dass sich das Resultat nur wenig ändert, wenn man die Eingabegrößen nur gering variiert.
- Mathematisch kann man dies durch das Konzept der Stetigkeit formalisieren.

20.2. Def.:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$.
Wir sagen, $f(x)$ konvergiert für $x \to \xi$ gegen den Grenzwert η, falls für jede (!) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq \xi \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \eta$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{x_n \to \xi} f(x_n) = \eta$.

20.3. Beispiele

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ hat für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ einen Grenzwert:
Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$.
Dann konvergiert die Folge (x_n^2) gegen ξ^2.

b) $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ hat in 0 keinen Grenzwert

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Für eine Folge (x_n) mit $x_n \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt jedoch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1.$$

Die für Folgen bekannten Grenzwertsätze lassen sich auf Funktionsgrenzwerte übertragen:

20.4 Satz (<u>Grenzwertsätze für Funktionen</u>)

Existieren für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, so gilt:

a) $\lim\limits_{x\to\xi} \big(f(x) \pm g(x)\big) = f(\xi) + g(\xi)$

b) $\lim\limits_{x\to\xi} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = f(\xi)\cdot g(\xi)$

c) $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ falls $g(\xi) \neq 0$.

d) $\lim\limits_{x\to\xi} \big(c\, f(x)\big) = c\, f(\xi)$

e) $\lim\limits_{x\to\xi} |x| = |\xi|$.

20.5. Def.: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig in $\xi \in \mathbb{R}$</u>, wenn dort Funktionswert und Grenzwert übereinstimmen:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f\Big(\lim_{x\to\xi} x\Big).$$

Ist f in allen Punkten stetig, so heißt f <u>stetig</u>.

Der folgende Satz zeigt, dass kleine Änderungen im Argument einer stetigen Funktion nur zu kleinen Änderungen der Funktionswerte führen.

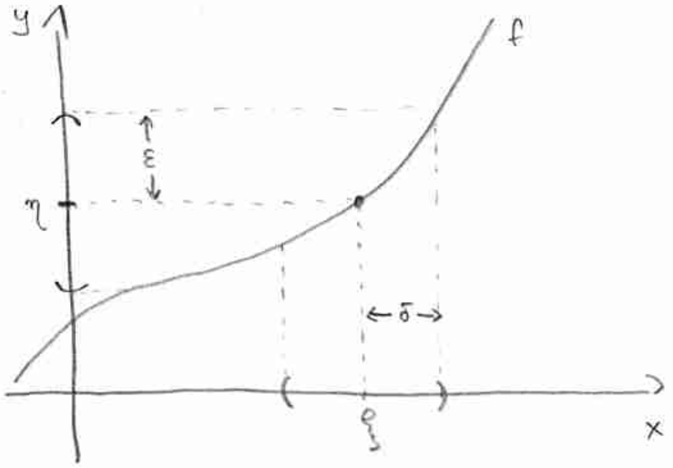
20.6. Satz (<u>ε-δ-Kriterium der Stetigkeit</u>)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

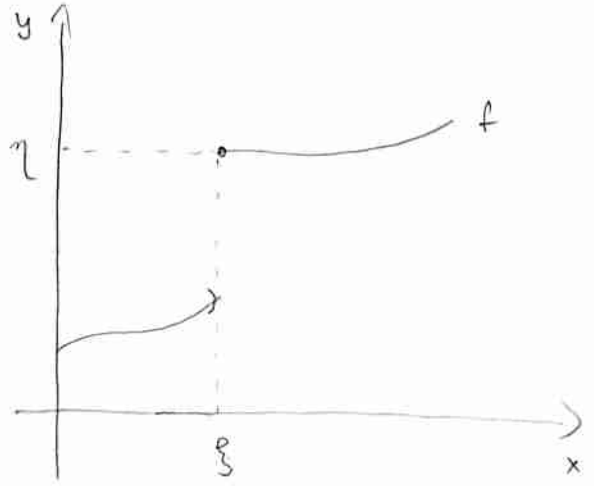
a) f ist stetig in $\xi \in \mathbb{R}$, d.h. $f(\xi) = \lim_{x \to \xi} f(x)$

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|x - \xi| < \delta \implies |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$



Man kann also erreichen, dass die Funktionswerte beliebig nahe bei einander liegen, wenn sich die Argumente nur hinreichend wenig unterscheiden.



Das ist hier nicht möglich.
Die Funktion ist unstetig in ξ.

„Stetige Funktionen kann man zeichnen, ohne abzusetzen".

20.7. Bemerkungen

a) Satz 20.4 besagt, dass für in ξ stetige Funktionen $f(x), g(x)$ auch die Funktionen $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (falls $g(\xi) \neq 0$), $c\, f(x)$ stetig sind. Ebenso ist die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ stetig.

b) Die Komposition stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.

Denn: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

$$\Rightarrow \lim_{x_n \to \xi} f(x_n) = f(\xi) \quad \text{da } f \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \lim_{x_n \to \xi} g(f(x_n)) = g(f(\xi)) \quad \text{da } g \text{ stetig.}$$

c) Die Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe sind sinngemäß auch auf Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ übertragbar, deren Definitionsbereich D eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In diesem Fall müssen die betrachteten Folgen (x_n) in D liegen.

20.8. Beispiel

$f(x) = 5x^3 - 7x + 12$ ist stetig, denn:

$g_1(x) = 12$ ist stetig

$g_2(x) = -7x$ ist stetig

$g_3(x) = 5x^3$ ist stetig, da Produkt stetiger Funktionen

$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$

20.9. Satz (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Nullstellensatz:

Ist $f(a) \cdot f(b) < 0$, so ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

b) Zwischenwertsatz:

Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion:

Ist $f(x)$ stetig und streng monoton wachsend auf $[a,b]$. (d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$), so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Maximum-Minimum-Eigenschaft:

Es ex. $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.

Beweis von (a):

Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Wir konstruierend induktiv eine Intervallschachtelung (Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$) mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(a_n) \le 0$, $f(b_n) \ge 0$

b) $a \le a_{n-1} \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le b$

c) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$

Initialisierung: $a_0 := a$, $b_0 := b$.

Annahme: Die Intervallschachtelung sei bis zum Index n konstruiert, und erfülle (a)-(c)

Sei $c := \frac{a+b}{2}$.

Ist $f(c) < 0$, setze: $a_{n+1} := c$, $b_{n+1} := b_n$

Ist $f(c) \ge 0$, setze: $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c$.

$\Rightarrow$ a) $f(a_{n+1}) \le 0$, $f(b_n) \ge 0$

b) $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$

c) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \underset{\text{Ann.}}{\overset{\text{Ind.-}}{=}} \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

Nach Konstruktion ist

(a_n) mon. wachsend, nach oben beschränkt durch b, und $f(a_n) \le 0$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{a}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$ und $f(\tilde{a}) \le 0$

(b_n) mon. fallend, nach unten beschr. durch a, und $f(b_n) \ge 0$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{b}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \tilde{b}$ und $f(\tilde{b}) \ge 0$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = 0$ ist $\tilde{a} = \tilde{b} =: \xi$

Wegen $f(\xi) = f(\tilde{a}) \le 0$ und $f(\xi) = f(\tilde{b}) \ge 0$ ist $f(\xi) = 0$.

$\square$

Bem.: Dieser konstruktive Beweis beschreibt ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung, das <u>Bisektionsverfahren</u>. (→ Übungsaufgabe)

20.10 Gleichmäßige Stetigkeit

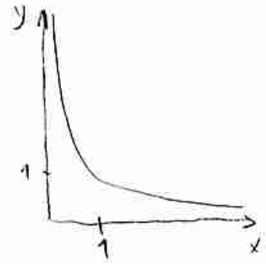
Nach dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit (20.6) sind stetige Funktionen solche, deren Funktionswert sich bei hinreichend kleinen Änderungen des Arguments nur beliebig wenig ändert; allerdings kann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ (Funktionswertänderung) das zugehörige $\delta(\varepsilon)$ (Argumentänderung) an jeder Stelle ξ anders sein.

In manchen Zusammenhängen ist es aber wichtig, dass δ nur von ε und nicht von ξ abhängt, das heißt, dass man in einem ganzen Intervall zu einem ε dasselbe $\delta(\varepsilon)$ wählen kann.

DEF.: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$ Definitionsbereich) heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert so, dass

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \qquad \text{für } x_1, x_2 \in D.$$

Bsp.: $D = (0, +\infty)$, $y = f(x) = \frac{1}{x}$



Zu jedem $\delta > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta \text{ ; es ist aber}$$

$$\left| f\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n+1}\right) \right| = \left| n - (n+1) \right| = 1.$$

Damit gibt es zu $\varepsilon = 1$ kein $\delta(\varepsilon)$ mit der geforderten Eigenschaft; f ist also nicht gleichmäßig stetig auf D (wohl aber stetig!).

SATZ: Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.

Bem.: Im obigen Beispiel war der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall.