§19. BINOMIALKOEFFIZIENTEN UND DIE BINOMIALREIHE

19.1. Motivation

Binomialkoeffizienten spielen eine große Rolle.

- in der Kombinatorik, wenn man die Anzahl der Teilmengen mit Mächtigkeit k einer n-elementigen Menge sucht
- zur Berechnung von $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ (Binomischer Satz)
- in der Potenzreihendarstellung von $(1+x)^\alpha$ für $|x|<1$.

19.2. Def.:

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \text{Anzahl der Teilmengen mit Mächtigkeit} \\ k \text{ einer } n\text{-elementigen Menge} \end{cases}$$

der Binomialkoeffizient n über k.

Bem.: Offenbar gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n$$

Der folgende Satz liefert eine rekursive Beschreibung des Binomialkoeffizienten

19.3. Satz (Rekursionsbeziehung für Binomialkoeffizienten):

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$. Dann gilt.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k=0 \text{ oder } k=n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Aussage klar für $k=0$ oder $k=n$. Sei also $0<k<n$.

Sei $M=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Die k-elementigen Teilmengen N von M zerfallen in 2 Typen:

a) Mengen N mit $x_n \notin N$. Diese entsprechen den k-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Davon gibt es nach Def. 19.2 $\binom{n-1}{k}$ Stück.

b) Mengen N mit $x_n \in N$. Sie entsprechen den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{x_n\}$. Es gibt hiervon $\binom{n-1}{k-1}$ Stück.

Insgesamt gilt daher: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

19.4. Pascal'sches Dreieck

Satz 9.3 erlaubt die Berechnung von Binomialkoeffizienten mit Hilfe eines Dreiecks, in dem jeder Koeffizient als Summe der beiden schräg darüber stehenden Koeffizienten berechnet wird:

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \qquad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \qquad \binom{2}{1}=2 \qquad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \qquad \binom{3}{1}=3 \qquad \binom{3}{2}=3 \qquad \binom{3}{3}=1$$

Für große n ist diese Rekursionsvorschrift ineffizient. Gibt es eine direkte Formel?

19.5. Satz (Direkte Formel für Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Dabei bezeichnet $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ die Fakultät von k.
Man setzt $0! := 1$.

Beweis: vollständige Induktion

19.6. Beispiel:

Wie viele Möglichkeiten gibt es im Lotto, 6 aus 49 Zahlen auszuwählen?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\ 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 13.983.816$$

Dabei spielt die Reihenfolge der 6 Zahlen keine Rolle.

Was hat das mit Analysis zu tun?

19.7. Satz (Binomialsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

19.8. Beispiele

a) $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$

$= b^2 + 2ab + a^2$

b) $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0$

$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$

19.9. Beweis des Binomialsatzes

Wir verwenden das Prinzip der Indexverschiebung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \qquad (*)$$

um den Binomialsatz mit vollst. Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.1.1 = 1. \checkmark$$
$$= (a+b)^0$$

Induktionsannahme:

Es sei $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Induktionsschluss.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \overset{\text{I.-Ann.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$\overset{\text{abspalten}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^{n+1} b^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^0 b^{n+1}$$

$$\overset{19.3}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \square .$$

19.10. Binomialreihe : Motivation

Aus dem Binomialsatz folgt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Kann man eine ähnliche Beziehung auch für $(1+x)^\alpha$ gewinnen, wenn α keine natürliche Zahl ist?

Hierzu müssen wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)$$

verallgemeinern zu

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ k \geq 0$$

Dann kann man zeigen:

19.11 Satz (Binomialreihe)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $-1 < x < 1$. Dann hat $(1+x)^\alpha$ die Potenzreihenentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Bem.: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe wegen $\binom{\alpha}{n} = 0 \ \forall \alpha > n$ ab (vgl. 19.2).

19.12. Konvergenz der Binomialreihe

Sei $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$. Dann gilt mit dem Quotientenkriterium für $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}\prod_{j=0}^{k}(\alpha-j)}{\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}\right| \cdot |x|$$

$$= \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| \cdot |x|$$

Wegen $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = 1$ ist $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1.$

Damit konvergiert (a_k) nach dem Quotientenkriterium.

19.13. Beispiele

a) $\alpha := -1$:

$$\binom{-1}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(-1-k) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-k) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k \quad \text{für } |x|<1$$

Die geometrische Reihe ist also eine spezielle Binomialreihe.

b) $\alpha := \frac{1}{2}$:

$$\binom{1/2}{0} = \underbrace{\frac{1}{0!}}_{1}\underbrace{\prod_{j=0}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}-j\right)}_{1} = 1$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{1!}\prod_{j=0}^{0}\left(\tfrac{1}{2}-j\right) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1}{2!}\prod_{j=0}^{1}\left(\tfrac{1}{2}-j\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) \quad \text{für } |x|<1.$$