§ 18 Darstellung v. Zahlen in Zahlsystemen

18.1. Motivation:

Die Wahl von 10 als Basis eines Zahlensystems ist relativ willkürlich. Für Anwendungen in der Informatik sind Zahldarstellungen z.B. im Hexadezimalsystem (16) besonders aber im Dualsystem (2) wichtig.

18.2 Satz: (Darst. natürlicher Zahlen in Zahlsystemen)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann lässt sich jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig darstellen in der Form

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \{0, \ldots, b-1\}$.

Anstelle von $a_m b^m + \ldots + a_0 b^0$ schreibt man $(a_m \, a_{m-1} \ldots a_0)_b$

Beweis: Hartmann, S.48.

18.3 Def.: Die möglichen Koeffizienten $0, \ldots, b-1$ nennt man Ziffern des b-adischen Systems zur Basis b.

Stets sei $b^0 = 1$.

18.4. Beispiel: $b=2$: $256 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 =$

$= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + \ldots + 0 \cdot 1 = (1\,0000\,0000)_2$.

Wie findet man die Ziffern für Zahldarstellung?

Durch wiederholte Division mit Rest:

$$(a_m b^m + \ldots + a_0 b^0) : b = a_m b^{m-1} + \ldots + a_1 b^0 \quad \text{Rest } a_0$$

$$(a_m b^{m-1} + \ldots + a_1 b^0) : b = a_m b^{m-2} + \ldots + a_2 b^0 \quad \text{Rest } a_1$$

$$\vdots$$

$$a_m b^0 : b = 0 \quad \text{Rest } a_m$$

18.5. Def.:

Es sei $z \in \mathbb{Z}$ und für alle $n \geq z$ sei $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=z}^{\infty} \frac{a_n}{b^n} \qquad \text{(Reihe mit negativen Indizes)}$$

mit $a_z \neq 0$ heißt b-adischer Bruch.

Man schreibt dafür $(a_z a_{z+1} \dots E -z)_b$.

Man spricht von

- einem endlichen b-adischen Bruch und schreibt
  $$(a_z a_{z+1} \cdots a_n \; E-z)_b$$
  falls für alle $i > n$ gilt: $a_i = 0$.

- einem periodischen b-adischen Bruch und setzt
  $$(a_z a_{z+1} \cdots a_n \overline{p_1 \; p_r} \; E-z)_b :=$$
  $$:= (a_z \dots a_n p_1 \cdots p_r p_1 \cdots p_r \dots E-z)_b$$
  falls eine Folge $p_1 \cdots p_r$ von Ziffern sich ständig wiederholt.

Alternative Schreibweisen:

$$(a_z a_{z+1} \cdots a_0 , a_1 a_2 \cdots \cdots)_b \quad \text{für } z \leq 0,$$

und

$$(0,\underbrace{0 \dots 0}_{z-1 \text{ Stück}} a_z a_{z+1} \quad \dots \quad)_b \quad \text{für } z > 0.$$

18.6. Beispiel:

$$(4{,}625\,E\,1)_7 = (46{,}25)_7 = 4 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 + \frac{2}{7} + \frac{5}{7^2} = \frac{1685}{49}.$$

18.7 Satz: (Darst. reeller Zahlen in Zahlsystemen)

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann gilt:

a) Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, gibt es einen b-adischen Bruch, der gegen x konvergiert.

c) Jeder periodische b-adische Bruch konvergiert gegen ein $y \in \mathbb{Q}$, $y \geq 0$.

d) Zu jedem $y \in \mathbb{Q}$, $y \geq 0$, gibt es einen periodischen oder endlichen b-adischen Bruch, der gegen y konvergiert.

Beweis: a), b), c): Hartmann, S. 251.

Zu d) O.B.d.A. sei $y = \frac{p}{q} < 1$, $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$.

Gesucht also $a_1, a_2, \ldots$ mit

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

Berechnung der a_i durch folg. Divisionsalgorithmus für nat. Zahlen:

$$\begin{aligned}
b \cdot p &= a_1 q + r_1 & 0 \leq r_1 < q, \\
b \cdot r_1 &= a_2 q + r_2 & 0 \leq r_2 < q \\
&\ \vdots & \vdots \qquad\qquad (*) \\
b \cdot r_n &= a_{n+1} q + r_{n+1} & 0 \leq r_{n+1} < q. \\
&\ \vdots & \vdots
\end{aligned}$$

Es ist stets $a_i < b$, denn:

Man setze $r_0 := p$. Aus $b \leq a_i$ und $r_{i-1} < q$ für $i \in \mathbb{N}$ folgt $b \cdot r_{i-1} < b \cdot q \leq a_i \cdot q$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu $b \cdot r_{i-1} = a_i q + r_i \geq a_i \cdot q$.

Diese a_i sind die gesuchten Koeffizienten, denn aus dem Gl-sys. (*) folgt:

$$p = \frac{a_1}{b} \cdot q + \frac{r_1}{b}$$

$$r_1 = \frac{a_2}{b} \cdot q + \frac{r_2}{b} \quad \underset{r_1 \text{ einsetzen}}{\Longrightarrow} \quad p = \left(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2}\right) \cdot q + \frac{r_2}{b^2}$$

$$\vdots \qquad \underset{r_i \text{ einsetzen}}{\Longrightarrow} \qquad \vdots$$

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{b} \cdot q + \frac{r_{n+1}}{b} \quad \Longrightarrow \quad p = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k}\right) \cdot q + \frac{r_{n+1}}{b^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{r_{n+1}}{b^{n+1} q}}_{\substack{\text{konv. gegen } 0 \\ \text{für } n \to \infty}} = \frac{p}{q} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{b^k}}_{\Rightarrow \text{ konv. gegen } \frac{p}{q}} .$$

Wann endet der Algorithmus?

Gilt $r_n = 0$, dann ist $\frac{p}{q} = (0, a_1 \ldots a_n)_b$

Gilt stets $r_n \neq 0$, dann muss sich ein Rest wiederholen, der Bruch wird periodisch, alle Divisionen wiederholen sich

Ist z.B. $r_n = r_s$ für ein $n > s$, dann folgt $a_{s+1} = a_{n+1}$, also $\frac{p}{q} = (0, a_1 \ldots a_s \overline{a_{s+1} \ldots a_n})_b$.

18.8. Bemerkung: Die Darstellung aus Def. 18.5 zur Basis $b = 2$ entspricht der Speicherung von Zahlen im Computer. Die endliche (!) Folge der a_i heißt Mantisse. Die sogenannte Gleitkommadarstellung umfasst das Vorzeichen, die Mantisse und den Exponenten. Typischer float:

$$\underbrace{-}_{1 \text{ Bit}} 1, \underbrace{01 \ldots 1}_{23 \text{ Bit}} \cdot 2^{\overbrace{99}^{8 \text{ Bit}}} .$$