§ 17 POTENZREIHEN

17.1. <u>Motivation</u>: Pot.-Reihen sind wichtig bei der Darstellung und Approximation von Funktionen (Taylorreihen, erzeugende Funktionen)

17.2. <u>Def.</u>: Eine Reihe der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$$

mit $x_0, x \in \mathbb{R}$ heißt <u>Potenzreihe</u>. x_0 heißt <u>Entwicklungspunkt</u>.
Im folgenden sei stets $x_0 = 0$.

17.3. <u>Beispiele</u>:

1) Die Exponentialreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

2) Die geometrische Reihe stellt für $|x| < 1$ eine Fn. dar:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad \text{(vgl. 16.15.)}$$

Sie konvergiert absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

Es scheint eine „Grenze" zu geben, welche die Bereiche trennt, in denen eine Pot.-Reihe konvergiert oder divergiert.

17.4. <u>Satz</u>: Für eine Pot.-Reihe, die nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es ein $R \geq 0$ so, dass sie für $|x| < R$ absolut konvergiert und für $|x| > R$ divergiert.

<u>Beweis</u>: Siehe Brill, S. 271.

Die Zahl R heißt <u>Konvergenzradius</u> und

$]-R, R[$ heißt <u>Konvergenzintervall</u>.

Man legt fest:

$R = \infty$: Die Pot.-Reihe konv. absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

$R = 0$: " " " nur für $x = 0$.

17.5. <u>Anmerkung</u>: Man darf auch komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ einsetzen. In $\mathbb{C}$ ist die Menge $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \}$ ein (offener) Kreis.

Kann man R berechnen?

17.6. <u>Satz</u>: (Hadamard; Berechnung des Konvergenzradius)

Hat die Pot-Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ einen Konvergenzradius R und konvergiert die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \quad .$$

Die Aussage bleibt richtig für $R = 0$ oder $R = \infty$, wenn man $\frac{1}{R}$ dann als ∞ oder 0 interpretiert.

<u>Beweis</u>: Siehe Brill, S. 272.

17.7. <u>Beispiele</u>:

a) Geom. Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$.

Aber Divergenz für $x = \pm R$.

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$ hat Konv.-Radius $R = 1$, denn:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Für $x = 1$: Divergenz, harmonische Reihe.

Für $x = -1$: Konvergenz, alternierende harmonische Reihe.