§ 16: REIHEN

16. 1. Motivation

- Reihen sind spezielle Folgen, die z.B. in Form von Potenzreihen wichtige Anwendungen in der Approximation klassischer Funktionen wie sin, cos, exp und log haben.
- In der Informatik haben sie zudem Bedeutung in der Zahlendarstellung.

16.2. Def.: Sei (a_n) eine Folge. Bildet man hieraus die neue Folge (s_n) mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

so nennt man (s_n) eine <u>Reihe</u> und schreibt hierfür $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Glieder s_n heißen <u>Partialsummen</u> der Reihe. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so wird ihr Grenzwert $s := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Folgen und Reihen unterscheiden sich also lediglich dadurch, dass man bei Reihen versucht, Konvergenzaussagen nicht in Abhängigkeit von s_n, sondern von den Folgengliedern a_k zu gewinnen.

16.3. Satz (Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Cauchy-Kriterium (vgl. 14.11 (b)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq n_0(\varepsilon) \text{ mit } m \geq n.$$

b) Notwendige Konvergenzbedingung

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ (a_k) ist Nullfolge

(Die Umkehrung ist i. A. falsch!)

c) Linearität

Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergieren, so konvergieren auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

d) Leibniz-Kriterium

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen a_k. Dann konvergieren die alternierenden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Ihr Grenzwert liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Partialsummen.

Beweis:

a) Folgt aus dem Cauchy-Kriterium 14.11 (b).

b) Folgt aus (a) mit $m = n$.

c) Folgt aus Satz 14.13.

d) Betrachte (s_n) mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

d.h. $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, (*)

$(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. (**)

Wegen

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \overset{\text{wachsend}}{\geq} s_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist (s_{2n}) von unten beschränkt, d.h. es ex.

$$s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Analog zeigt man, dass (s_{2n-1}) von oben beschränkt ist und somit

$$s' = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$$

existiert. Wegen

$$s - s' = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

haben (s_{2n}) und (s_{2n-1}) den selben Grenzwert, d.h. (s_n) konvergiert gegen s. Ferner gilt:

$$s_{2n-1} \overset{(**)}{\leq} s \overset{(*)}{\leq} s_{2n} \quad \forall n$$

Der Beweis für $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ verläuft analog. $\square$

Bem.: Das Cauchy-Kriterium impliziert, dass das Konvergenzverhalten einer Reihe sich nicht ändert, wenn man endlich viele Folgenglieder abändert. In diesem Fall ändert sich höchstens der Grenzwert.

16.4. Beispiele

a) Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

(Hier ist es sinnvoll, mit $k=0$ zu beginnen)

Wie sehen die Partialsummen aus?

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\
q\, s_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\
\hline
(1-q)\, s_n &= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Für $q \neq 1$: $\quad s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Für $|q| < 1$ ist daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

d.h. die geometrische Reihe konvergiert.

Für $|q| \geq 1$ ist $(a_k) = (q^k)$ keine Nullfolge. Nach 16.3 (b) kann $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ in diesem Fall nicht konvergieren.

b) Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ist divergent, denn es gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \text{ für } m \to \infty$$

Somit ist für $0 < \varepsilon < 1$ das Cauchy-Kriterium verletzt.

c) Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Wegen $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$ gilt die Einschließung

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \leq 1 .$$

(Man kann zeigen, dass der Grenzwert $\ln 2 \approx 0{,}69\ldots$ beträgt)

Bei endlichen Summen darf man die Reihenfolge der Summation vertauschen. Bei unendlichen Summen (Reihen) ist dies nur in besonderen Fällen erlaubt. Hierzu benötigen wir den Begriff der absolut konvergenten Reihe.

16.5. Def.: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

16.6. Beispiele

a) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Nach dem Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \text{ mit } m \geq n$$

Wegen $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$ (vgl. 13.14 (c)) gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \text{ mit } m \geq n,$$

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium. □.

b) Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe (16.4. (c)) konvergiert. Sie konvergiert jedoch nicht absolut, da die harmonische Reihe (16.4. (b)) divergiert.

16.7 SATZ (Kriterien für absolute Konvergenz)

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent

$\iff$ Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) Majorantenkriterium:

$|a_k| \le b_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ heißt Majorante für } \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$

c) Quotientenkriterium:

Es sei $a_k \neq 0$ für alle $k \ge k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Gilt für alle $k \ge k_0$ die Ungleichung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q$ mit einem $q<1$,

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

d) Wurzelkriterium:

Gilt für alle $k \ge k_0$ die Ungleichung $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ mit einem $q<1$,

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: a) $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsende Folge.

Damit ist sie nach 14.11 (c) konvergent, falls sie beschränkt ist („$\Rightarrow$“); die andere Richtung („$\Leftarrow$“) folgt aus Satz 14.9. $\square$

b) Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent und damit beschränkt.

Wegen $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{n} b_k$ ist die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ durch dieselbe Schranke nach oben beschränkt.

Nach (a) folgt absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

c), d): In beiden Fällen wird der Beweis geführt, indem die Reihe gemäß Majorantenkriterium (b) gegen eine geometrische Reihe abgeschätzt wird.

16.8 BEMERKUNGEN:

a) Um nach Quotienten- bzw. Wurzelkriterium absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgern zu können, reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \qquad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

gilt.

b) Gilt $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ oder $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

16.9 BEISPIELE:

a) Für jede reelle Zahl z ist $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{=:a_k} \left(= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)$ absolut konvergent.

Es ist nämlich für $z \neq 0$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k\to\infty$$

und damit nach Quotientenkriterium $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
(Fall $z=0$: trivial)

Anm.: Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (e: Euler'sche Zahl, vgl. 14.15)

b) Wir betrachten $\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(\ln k)^k}}_{=:a_k}$.

Wegen $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\ln k} \longrightarrow 0$ für $k\to\infty$ konvergiert die Reihe nach Wurzelkriterium absolut.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist absolut konvergent, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

d) Für jedes $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ absolut konvergent, denn:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} < 2 \qquad \text{(vgl. a)}$$

Anm. 1: Man kann sogar zeigen, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$,
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ absolut konvergiert.

Anm. 2: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Anm. 3: Wegen $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^r}{(k+1)^r} \right| = 1$ nützt das Quotientenkriterium hier nichts.

---

e) Warnung: Für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ bzw. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ ist kein Schluss auf das Konvergenzverhalten möglich.

Für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (16.4 (c)) gilt z.B. $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1$; die Reihe konvergiert, konvergiert aber nicht absolut.
Ebenso gilt $\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$, $r > 1$ (absolut konvergent, siehe b) oder $0 < r < 1$ (divergent).

16.10 SATZ (Umordnungssatz):

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, und ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Permutation (bijektive Abbildung, „Umnummerierung"), so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k}$.

Beweis: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset \{1, \ldots, N\}$ gilt und damit

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{\sigma_k}| \le \sum_{k=1}^{N} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nach 16.7 a) ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma_k}|$ also absolut konvergent; für den Grenzwert $S' := \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma_k}|$ gilt $S' \le S$.

Umgekehrt ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma_k}|$, also ist $S \le S'$ und daher $S = S'$.

Wir betrachten nun die absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+a_k)$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{\sigma_k}|+a_{\sigma_k}).$$

Wegen der Linearität (16.3c) folgt $S+\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S'+\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma_k}$

und daher $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma_k}$. $\square$

16.11 <u>BEMERKUNG:</u>

Wenn für *jede* Permutation $\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\sigma_k}$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ absolut.

16.12. <u>Umordnung nicht absolut konvergenter Reihen</u>

Ordnet man eine nicht absolut konvergente Reihe um, so kann sich der Grenzwert und das Konvergenzverhalten ändern

<u>Bsp.:</u> Eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\pm\dots$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ & +\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\\ & +\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}\\ & +\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{10}\\ & \vdots\\ & +\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2n+2}\\ & \vdots\end{aligned}$$

Da die positiven Teilsummen $\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}-1}>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}$

erfüllen, ist diese Reihe nach dem Cauchy-Kriterium (14.11b) divergent.

Es gilt sogar der Satz:
Ist eine Reihe konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, dann gibt es

- zu jeder reellen Zahl g eine Umordnung der Reihe mit g als Grenzwert,
- bestimmt divergente Umordnungen mit Grenzwert $+\infty$ und $-\infty$,
- eine unbestimmt divergente Umordnung.

Jetzt wollen wir uns noch mit der „Multiplikation" von Reihen beschäftigen.
Konkret: Kann man das Produkt zweier Reihen etwa folgendermaßen „ausmultiplizieren":

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right) = \sum_{k=l=1}^{\infty} a_k b_l \quad ?$$

(Dabei soll die Reihe auf der rechten Seite jedes Paar (k,l), $k,l \in \mathbb{N}$, von Indizes genau einmal enthalten.)
Die Antwort gibt der folgende Satz.

16.13 SATZ (Produkt von Reihen):
Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent.
Dann ist für jede Nummerierung $(\sigma,\mu): \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ (Bijektion) der Indexpaare die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right).$$

(ohne Beweis)

Bemerkung: Für nicht absolut konvergente Reihen ist aufgrund des Satzes aus 16.12 keine vergleichbare Aussage möglich.

16.14 Folgerung

Mit der Reihenfolge der Indexpaare gemäß

μ_k \ σ_k	0	1	2	3	…
0	0	2	5	9	$\leftarrow k$
1	1	4	8		
2	3	7	$\ddots$		
3	6				
$\vdots$					

erhält man (hier wird ab 0 nummeriert, damit sich einfachere Ausdrücke ergeben!)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

16.15 Beispiel

Es gilt nach (16.4a) für $z \in \mathbb{R}$, $0<z<1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad \text{sowie} \qquad \sum_{l=0}^{\infty} (-z)^l = \frac{1}{1+z}.$$

Für das Produkt erhalten wir nach 16.14

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-z)^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} z^k (-z)^{n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} z^n\right)$$

und wegen $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-z)^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

Nach 16.4a ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$.

Andererseits gilt nach der dritten binomischen Formel

$$\frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-z^2}.$$