§ 14: FOLGEN

14.1 Motivation

- In der Mathematik werden Folgen benötigt, um stetige Funktionen zu untersuchen und um die Differential- und Integralrechnung einzuführen
- Klassische Funktionen wie sin, cos, log, exp werden als Grenzwerte von Zahlenfolgen definiert. Programmiert man eine Mathematikbibliothek, ist es nötig, Darstellungen zu verwenden, bei denen die Folgen schnell berechenbar sind und schnell konvergieren.

14.2. Def.: Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n) =: a_n$ heißt <u>(reellwertige) Folge</u>. Wir nennen a_n das <u>n-te Glied</u> der Folge und kürzen die Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) oder einfach nur a_n ab.

Bem.: Viele (jedoch nicht alle) der folgenden Resultate lassen sich auch auf andere Wertebereiche (z.B. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$) übertragen.

14.3. Beispiele

a) konstante Folge: $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

d) Die <u>Fibonacci-Folge</u> ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_2 = 1,$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Sie ergibt $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

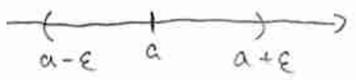
e) $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $1, b, b^2, b^3, \dots$.

14.4. Def.: Eine reellwertige Folge (a_n) heißt <u>monoton wachsend</u>, wenn $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Gilt sogar $a_{n+1} > a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so ist sie <u>streng monoton wachsend</u>. Analog definiert man <u>(streng) monoton fallend</u>.

(a_n) heißt <u>nach oben/unten beschränkt</u>, wenn $\{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben/unten beschränkt ist. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ werden als das Supremum / Infimum von $\{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

Wie kann man das Konvergenzverhalten einer Folge beschreiben?

14.5. Def.: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ die <u>ε-Umgebung</u> von a.



14.6. Def.: Eine Folge (a_n) heißt <u>konvergent</u> gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } |x-a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Man schreibt: „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$" oder „$a_n \to a$ für $n \to \infty$".

a heißt <u>Grenzwert</u> <u>(Limes)</u> der Folge (a_n).

Eine reellwertige Folge heißt <u>divergent</u>, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

14.7. <u>Beispiele</u>

a) Die konstante Folge ist konvergent.

$a_n = a \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, denn:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. nach 13.12 (b) ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Wegen $0 < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} \quad \forall\, n \ge n_0$ ist also

$\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0) \quad \forall\, n \ge n_0$.

Folgen, die gegen 0 konvergieren, heißen auch <u>Nullfolgen</u>.

c) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

14.8. Def.: Sei (a_n) eine Folge. Dann <u>strebt a_n gegen ∞</u>, ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), falls für jedes $r > 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ ex. mit $a_n > r \quad \forall\, n \ge n_0$. In diesem Fall spricht man auch von <u>uneigentlicher Konvergenz</u>, oder <u>bestimmter Divergenz</u>.

Analog definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls für jedes $r < 0$ ein $n_0(r) \in \mathbb{N}$ ex. mit $a_n < r \quad \forall\, n \ge n_0$.

Bsp.: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Können unbeschränkte Folgen konvergieren?

14.9 Satz (<u>Beschränktheit konvergenter Folgen</u>)

Eine konvergente Folge ist <u>beschränkt</u>. (d.h. sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt).

<u>Beweis</u>: Sei $a = \lim a_n$. Dann ex. n_0 mit $a_n \in U_1(a)$ $\forall n \geq n_0$.

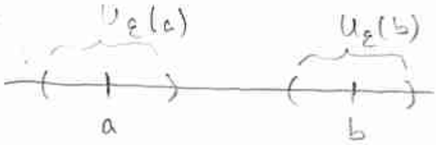
Damit ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in der beschränkten Menge $\{a_1, \dots, a_{n_0-1}\} \cup U_1(a)$ enthalten. $\square$.

Kann es mehrere Grenzwerte geben?

14.10 Satz (<u>Eindeutigkeit des Grenzwerts</u>)

Konvergiert die Folge (a_n), so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

<u>Beweis</u>: Ann.: (a_n) habe zwei Grenzwerte a, b mit $a \neq b$.



Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\varepsilon < \dfrac{|a-b|}{2}$.

Dann ist $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. $(*)$

Da a, b Grenzwerte von (a_n) sind, ex. n_0, n_1 mit

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$$
$$a_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_1.$$

D.h. $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$ $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$. Das ist ein Widerspruch zu $(*)$. $\square$

Gibt es Kriterien, mit deren Hilfe man Konvergenz nachweisen kann?

14.11 Satz (Konvergenzkriterien)

a) Vergleichskriterium

Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Folgen mit

$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: b$.

Dann konvergiert (b_n) und es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

b) Cauchy-Kriterium

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon): \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0 .$$

(Die Folgenglieder weichen untereinander beliebig wenig ab, wenn der Index hinreichend groß ist.)

Beweis: Wir zeigen nur (a).

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$:

$$a_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_0$$
$$c_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow \quad b - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < b + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$$

Also ist $b_n \in U_\varepsilon(b) \ \forall n \geq n_0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $\square$.

c) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Ebenso ist eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent.

14.12. Beispiel

$\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt. Also ist $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergent.

14.13. Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
Dann gilt:

a) Falls $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

b) Falls $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$ ($a < b$ ist i. A. falsch!)

c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

d) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ (d.h. insbes. auch $\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = ca$)

e) Ist $b \neq 0$, so ex. n_0 mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.
Dann sind auch $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergent mit Limes $\frac{1}{b}$ bzw. $\frac{a}{b}$.

f) $(|a_n|)$ konvergiert gegen $|a|$.

g) → siehe nächste Seite

14.14. Beispiele:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{17}{n} = 17 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 17 \cdot 0 = 0$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4 - 2n^2 + 1}{7n^4 + 11n^3 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{11}{n} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{5-0+0}{7+0+0} = \dfrac{5}{7}.$

28/11/03

Nachtrag zu 14.13:

g) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_n \geq 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

Dabei bezeichnet $\sqrt[m]{a_n}$ die eindeutig bestimmte Zahl $w \geq 0$ mit $w^m = a_n$.

14.15 Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$

Anwendungsbeispiel:

Ein Geldbetrag a_0 wird mit einem Jahreszinsfuß p jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, usw. verzinst. Nach einem Jahr ergibt sich also

$a_1 = a_0 (1+p)$ bei jährl. Verzinsung

$a_2 = a_0 \left(1+\frac{p}{2}\right)^2$ bei halbjährl. Verzinsung

$a_4 = a_0 \left(1+\frac{p}{4}\right)^4$ bei vierteljährl. Verzinsung

$a_{12} = a_0 \left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}$ bei monatl. Verzinsung

$a_{365} = a_0 \left(1+\frac{p}{365}\right)^{365}$ bei tägl. Verzinsung

z.B. ergibt sich mit $a_0 = 100$ € und $p = 0.03$:

$a_1 = 103$ € $\qquad a_{12} = 103{,}04$ €

$a_2 = 103{,}02$ € $\qquad a_{365} = 103{,}05$ €

$a_4 = 103{,}03$ €

Konvergiert die Folge (a_n) mit $a_n = (1 + \frac{p}{n})^n$?

Man kann zeigen:

- (a_n) ist streng monoton wachsend
- (a_n) ist nach oben beschränkt

Nach Satz 14.11 (c) konvergiert (a_n) somit.

Für $p = 1$ ist der Grenzwert die Eulersche Zahl e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.7182\ldots$$

und für allgemeines p erhält man

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p}$$