TEIL C: EINDIMENSIONALE ANALYSIS

§13: AXIOMATIK DER REELLEN ZAHLEN

13.1. Motivation

- Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten, Differentiation und Integration
- Viele Phänomene in den Natur- und Ingenieurswissenschaften lassen sich mit Hilfsmitteln der Analysis beschreiben
- In der Informatik sehr wichtig z.B. bei Komplexitätsabschätzungen und in physikalischen Bereichen wie Visual Computing
- Analysis verwendet grundlegende Eigenschaften der reellen Zahlen
- Wodurch unterscheidet sich $\mathbb{R}$ beispielsweise von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$?

13.2. Def.: Wir nennen einen Körper $(K,+,\cdot)$ angeordnet, wenn es eine Teilmenge P (den Positivbereich) gibt, so dass gilt:

a) P, $\{0\}$ und $-P := \{x \in K \mid -x \in P\}$ bilden eine Partition von K.

b) P ist abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$:
$$x, y \in P \Rightarrow x+y \in P,\quad x \cdot y \in P$$

13.3. Def.: Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper mit Positivbereich P. Dann lassen sich für $x,y \in K$ folgende Ordnungsbegriffe definieren:

$$x < y \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x \in P$$
$$x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad x = y \text{ oder } x < y$$
$$x > y \quad :\Longleftrightarrow \quad y < x$$
$$x \geq y \quad :\Longleftrightarrow \quad y \leq x$$

Folgerung: $x \in P \Leftrightarrow x - 0 \in P \Leftrightarrow x > 0$

Der Positivbereich enthält die positiven Zahlen.

Welche Eigenschaften besitzen angeordnete Körper?

13.4. Satz (<u>Eigenschaften angeordneter Körper</u>)

Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper.

Dann gilt für alle $x, y, z, w \in K$:

a) Vergleichbarkeit:

entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$

b) Transitivität:

$x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$

c) Verträglichkeit der Anordnung mit der Addition:

Sei $x < y$ und $z \leq w$: $\Rightarrow x + z \leq y + w$.

d) Verträglichkeit der Anordnung mit der Multiplikation:

$x < y$ und $z > 0 \Rightarrow xz < yz$

$x < y$ und $z < 0 \Rightarrow xz > yz$

e) Invertierung:

bzgl. Addition: $x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$x < y \Rightarrow -x > -y$

bzgl. Multiplikation: $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

f) Positivität des Quadrats: $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

Beweis: Übungsaufgabe

13.5 Konsequenzen

a) In einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot)$ ist $1 > 0$.

Beweis: Da $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem El. 1 ist, ist $1 \neq 0$.

Nach 13.4 (f) folgt: $0 < 1^2 = 1$

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist kein angeordneter Körper, da $i^2 = -1 < 0$ ein Widerspruch zu 13.4 (f) ist.

c) Jeder angeordnete Körper enthält $\mathbb{N}$ als Teilmenge.

Denn: Aus $0 < 1$ folgt mit 13.4. (c)

$$1 < \underbrace{1+1}_{=:2} < \underbrace{1+1+1}_{=:3} < \dots$$

Endliche Körper wie z.B. $\mathbb{Z}_p$ können daher nicht angeordnet sein.

Offensichtlich sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ angeordnete Körper.
Worin unterscheidet sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$?

13.6. Def.: Sei $(K,+,\cdot)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$.
Ein Element $x \in M$ heißt <u>Maximum</u> von M ($x = \max M$), wenn für alle $y \in M$ gilt: $y \leq x$
$x \in M$ heißt <u>Minimum</u> von M ($x = \min(M)$), falls $y \geq x$ für alle $y \in M$.

Bem.: Hat M ein Maximum oder Minimum, so ist dieses eindeutig bestimmt

Denn: Seien x, x' zwei Maxima; dann gilt:
$x' \geq x$ (da x' Maximum)
$x \geq x'$ (da x Maximum)
Nach 13.4(a) ist daher $x = x'$.

13.7. <u>Beispiele</u>

Sei $K = \mathbb{Q}$.

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$
$\Rightarrow \max M_1 = 2$, da $2 \in M_1$ und $x \leq 2 \ \forall x \in M_1$

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ hat kein Maximum, denn:
Zu jedem $x \in M_2$ gibt es ein $y \in M_2$ mit $y > x$.
Wähle zum Beispiel $y = \frac{x+2}{2}$
Dann ist $x < y < 2$.

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ hat kein Maximum, denn:

Ist x Max., so ist $x^2 = 2$ oder $x^2 < 2$.

Für $x^2 = 2$ ist $x \notin \mathbb{Q}$.

Für $x^2 < 2$ findet man ähnlich wie in (b) eine Zahl $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $y^2 < 2$.

13.8. Def.:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$.

M heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $x \in K$ (nicht notwendigerweise aus M) gibt mit $y \leq x \quad \forall y \in M$.

Dann heißt x obere Schranke von M.

$s \in K$ heißt kleinste obere Schranke (Supremum) von M ($s = \sup M$) wenn für jede andere obere Schranke x gilt:

$x \geq s$.

Analog definiert man nach unten beschränkt, untere Schranke, und größte untere Schranke (Infimum).

13.9. Beispiele:

Wir betrachten wieder $K = \mathbb{Q}$ und die Bsp. 13.7.

a) M_1 hat viele obere Schranken, z.B. $1000, 7, 2$.

kleinste obere Schranke: $\sup M_1 = 2$.

M_1 ist nicht nach unten beschränkt.

b) M_2 hat die gleichen oberen Schranken wie M_1.

Obwohl kein Max. existiert, gibt es ein Supremum:

$\sup M_2 = 2$

c) M_3 hat viele obere Schranken, z.B. 1000, 7, 1.42.
Es gibt jedoch keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$,
da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Diese Beispiele zeigen:

a) Wenn eine Menge M ein Maximum hat, so ist dieses auch Supremum.

b) Es gibt Mengen, die kein Maximum besitzen, jedoch ein Supremum.

c) In $\mathbb{Q}$ gibt es Mengen, die obere Schranken besitzen, jedoch keine kleinste obere Schranke.

13.10. Def.: Ein angeordneter Körper heißt vollständig, wenn in ihm jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen:

13.11 Satz (Axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$)

Es gibt genau einen vollständigen angeordneten Körper.
Er heißt Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Mit der Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen zeigt man:

13.12 Satz (Eigenschaften der reellen Zahlen)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Zu $x, y > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$ (Archim. Axiom)

b) Zu $x > 0$ ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.

c) Zu $x \in \mathbb{R}$ ex. $m = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$.

13.13. Def.: Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Betrag von x.

13.14 Satz (Eigenschaften des Betrags)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x| \geq 0$

$|x| = 0 \iff x = 0$

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$