§ 12: BOOLE'SCHE ALGEGRA

12.1. Motivation.

- In §1 und §2 haben wir gesehen, dass Operationen auf Mengen ($\cap$, $\cup$, Komplementbildung) und auf logischen Ausdrücken ($\wedge$, $\vee$, $\neg$) Ähnlichkeiten besitzen und ähnlichen Gesetzen folgen.
- Liegt eine gemeinsame algebraische Struktur vor?
- Gibt es weitere wichtige Beispiele hierfür?

12.2. Def.: Eine Boole'sche Algebra besteht aus einer Menge M, zwei algebraischen Operationen $+$ und $\cdot$, sowie einer einstelligen Operation $\neg$, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

a) Kommutativgesetze:

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

b) Assoziativgesetze:

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

c) Distributivgesetze:

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$
$$x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$$

d) Neutrale Elemente:

Es gibt $0, 1 \in M$ mit

$$0 + x = x$$
$$1 \cdot x = x$$

e) Komplementäre Elemente:

$$x + \neg x = 1$$

$$x \cdot \neg x = 0$$

Wir nennen $\neg x$ das zu x komplementäre Element.

12.3. Beispiel 1: Operationen auf Mengen

Sei M eine Menge, $P(M)$ ihre Potenzmenge, und $\complement$ die Komplementbildung. Dann ist $(P(M), \cup, \cap, \complement)$ eine Boole'sche Algebra mit $\emptyset$ als Nullelement und M als Einselement:

a) Kommutativgesetze gelten nach Satz 1.6.

b) Assoziativgesetze " " " " .

c) Distributivgesetze " " " " .

d) $\emptyset \cup A = A \quad \forall A \in P(M)$

$M \cap A = A \quad \forall A \in P(M)$

(denn $A \subset M$)

e) Sei $A \in P(M)$ und $\complement A := \bar{A} := M \setminus A$.

Dann gilt:

$$A \cup \bar{A} = M$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

12.4. Beispiel 2: Aussagenlogik

Die Menge der Aussageformeln bildet zusammen mit der Disjunktion $\vee$, der Konjunktion $\wedge$ und der Negation $\neg$ eine Boole'sche Algebra. Dabei bildet die logischen Konstante „falsch" das Nullelement und „wahr" das Einselement:

(a), (b), (c): Die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze gelten nach Satz 2.8.

d) Neutrale Elemente:

$0 \vee A = A$ (vgl. Wahrheitswertetafel 2.4)

$1 \wedge A = A$ (" " ")

e) Komplementäre Elemente:

$A \vee \neg A = 1$ (2.8 (a), Satz v. ausgeschl. Dritten)

$A \wedge \neg A = 0$ (2.8 (b), Satz v. Widerspruch)

In einer Boole'schen Algebra kann man zahlreiche Aussagen beweisen. Beispielsweise gilt:

12.5. Satz (Eigenschaften Boole'scher Algebren)

In einer Boole'schen Algebra $(M, +, \cdot, \neg)$ gilt:

a) $a = a + a$, $a = a \cdot a$ $\quad \forall a \in M$

b) $\neg(\neg a) = a \quad \forall a \in M$

c) Regeln von de Morgan:

$$\neg(a+b) = (\neg a) \cdot (\neg b)$$

$$\neg(a \cdot b) = (\neg a) + (\neg b)$$

Man kann sich leicht einen Überblick über alle endlichen Boole'schen Algebren verschaffen, denn es gilt:

12.6. Satz (Endliche Boole'sche Algebren)

a) Jede endliche Boole'sche Algebra ist isomorph zur Boole'schen Algebra der Teilmengen einer endlichen Mengen.

b) Endliche Boole'sche Algebren haben immer 2^n Elemente mit einem $n \in \mathbb{N}$.

c) Zwei endliche Algebren mit der gleichen Anzahl an Elementen sind isomorph.